

# 非圧縮性流体力学

## Incompressible Fluid Dynamics

中村佳朗  
Yoshiaki NAKAMURA

中部大学 教授  
名古屋大学 名誉教授

Professor of Chubu University  
Emeritus Professor of Nagoya University

2014年4月  
April, 2014

## 序言 (Preface)

非圧縮性流体力学では自動車の周りの流れのような低速の流れを取り扱う。つまり、流れの速度が大きくなったときに生じる流体の圧縮性の影響は無視する。物体周りの空気の流れを考えると、その流れの速度が遅い場合には、空気という流体を、水のように密度が変化しない流体の流れと同様に考えることができる。その差異は小さい。その理由を一言で言えば、低速流では、流れが流体の密度変化にほとんど影響を及ぼさないということである。

通常、流れの速度の尺度として、マッハ数 (Mach number:  $M$ ; 流れの速度を音速で割ったもの:  $M = V/a$ ) というパラメータを用いる。マッハ数が 0.3 以下であれば、圧縮性の影響は無視できる。このとき、流れの密度変化は 5% 以下である。逆に、マッハ数が 0.3 以上になると圧縮性の影響を考慮する必要がある。そのときには、物体周りの流れは場所場所でその密度が変化する。例えば、時速 500km/h (マッハ数は  $M=0.4$ ) のリニア新幹線では、その表面に沿って流れる流れは場所場所で密度が変化する。速い速度のところでは密度が小さくなる。このように密度が変化する場合には熱力学 (thermodynamics) を考慮する必要がある。そこでは機械的エネルギー (流れの運動エネルギー) と熱力学エネルギーの間でエネルギーのやりとりが発生する。

航空機を開発するときには、航空機の高速飛行状態 (巡航状態) での性能は当然重要である。しかし、同時に、離着陸時等の低速領域での性能も重要である。どんなに速く飛ぶ航空機でも地上から飛び上がり、最後は地上に降りてくる。このとき航空機を安全に地上に降ろす必要がある。超音速旅客機 (SST: supersonic transport) の開発を考える場合、高速空気力学と低速空気力学の両方を考慮し、それらのトレードオフ (trade-off) を行いながら機体を設計する (ちなみに航空機・宇宙機の設計ではトレードオフという概念が大変重要である)。具体的には、高速時には抵抗を減らすために後退角を大きくした翼を用い、低速時には出来るだけ矩形翼のような (胴体軸に垂直な方向に翼を伸ばす) アスペクト比の大きな翼を用いて揚力を稼ぐ。従って、これらの両方を考慮したハイブリッド形状の翼型が採用される。

全てを考慮した流体力学 (fluid dynamics) は、密度が変化する場合を扱う圧縮性流体力学 (compressible fluid dynamics) であるが、この教科書で扱う流れは基本的に低速流であるので、マッハ数という尺度で見た場合、 $M = 0$  の流れに相当する。しかし、 $M = 0$  であるからといって、流れの速度は  $V = 0$  であると勘違いしないように注意する必要がある。 $M = 0$  というのは圧縮性の効果が 0 という意味で、決して流れの速度が 0 であるという意味ではない。一つの解釈として、非圧縮性近似の場合、マッハ数の分母に来る音速 (sound speed:  $a$ ) が無限大になると考えても良い。圧縮性流に関しては、このシリーズの教科書「圧縮性流体力学」を参照のこと。

「非圧縮性流体力学」の教科書で扱う流れでは、簡単のために粘性 (viscosity) を無視している。さらに、流れを単純化するために渦度 (vorticity) も無視している。このような流れをポテンシャル流 (potential flow) と呼ぶ。しかし、ポテンシャル流は簡単過ぎる、といって馬鹿にしてはいけない。ポテンシャル流は、本来流れが持つ、多くの基本的性質を持っているし、外部流の場合、物体から少しでも離れれば、そこでの流れはポテンシャル流である (内部流の場合、流れが閉じ込められ、拡散して遠方に逃げる事が出来ないため、粘性が領域内を支配する)。ちなみに、粘性を考慮した流れについては、このシリーズの教科書「粘性流体力学」を参照されたい。

「非圧縮性流体力学」の教科書と「粘性流体力学」の教科書を勉強すれば、低速流のポイントは理解できるはずである。また、ここでの「非圧縮性流体力学」の教科書では、翼周りの流れと、なぜ揚力 (lift) が発生するかを理解できるように、それらに関連した基本的事項が順序だてて記述されている。

中村佳朗  
中部大学 教授  
名古屋大学 名誉教授  
2014年4月1日



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>非圧縮性流体基礎</b>	<b>1</b>
1.1	非圧縮性流体とは	1
1.2	支配方程式	1
1.3	流線に沿う流れの方程式	5
1.4	ポテンシャル流の解	10
1.5	吹き出し	11
1.6	2重吹き出し	15
1.7	渦	17
1.8	循環	19
1.9	トムソンの循環定理	19
1.10	ヘルムホルツの渦定理	21
1.11	流れの境界条件	23
<b>第 2 章</b>	<b>複素速度ポテンシャル</b>	<b>25</b>
2.1	複素速度ポテンシャル	25
2.2	一様流	27
2.3	吹き出し流れ	28
2.4	吹き出しと一様流との重ね合わせ	29
2.5	吹き出しと吸込みの組み合わせ	30
2.6	2重吹き出し	31
2.7	渦	32
2.8	角(かど)を回る流れ	34
<b>第 3 章</b>	<b>円柱周りの流れ</b>	<b>37</b>
3.1	基礎方程式	37
3.2	境界条件	39
3.3	境界条件の適用	39
3.4	一様中に置かれた円柱周りの流れ	41
3.5	円柱周りに循環がある場合	44
3.6	マグナス効果	46
3.7	一様流が迎角を持つとき	47

<b>第 4 章</b>	<b>等角写像</b>	<b>49</b>
4.1	等角写像とは	49
4.2	ジュコフスキー変換	52
4.3	一般ジュコフスキー変換	59
<b>第 5 章</b>	<b>ブラシウスの力およびモーメントの公式</b>	<b>65</b>
5.1	力の公式	65
5.2	モーメントの公式	67
5.3	クッタ・ジュコフスキーの定理	69
<b>第 6 章</b>	<b>平板に働く力</b>	<b>73</b>
6.1	迎角が付いたときの循環の大きさ	73
6.2	後縁での速度	75
6.3	平板に働く揚力	76
6.4	平板に働くモーメント	77
6.5	円弧翼の場合	78
<b>第 7 章</b>	<b>薄翼理論</b>	<b>81</b>
7.1	支配方程式	81
7.2	境界条件	82
7.3	圧力係数の求め方	85
7.4	対称翼の場合	86
7.5	反り板周りの流れ	90
7.6	迎角のある平板	97
7.7	薄翼の空力特性	98
<b>第 8 章</b>	<b>有限翼理論</b>	<b>103</b>
8.1	アスペクト比	103
8.2	プラントルの理論	105
8.3	空気力及び空力係数	109
8.4	循環が楕円分布の場合	111
8.5	楕円翼	115
8.6	後流解析	116

# 第1章 非圧縮性流体基礎

ここでは、非圧縮性流体力学 (Incompressible Fluid Dynamics) のもつ基礎的性質について勉強する。

## 1.1 非圧縮性流体とは

非圧縮性流体 (incompressible fluid) とは、圧力 (pressure) をいくら加えても、その容積 (volume)、つまり、密度 (density) が変わらない流体である。これは、液体 (liquid) を理想化したものである。ただし、空気 (air) など気体 (gas) の場合でも、運動している場合の流れを解くときには、その運動が遅い場合、つまり低速流では、この非圧縮性流体の近似が適用でき、速度分布や圧力分布を求めることができる。

非圧縮性流の状態方程式 (state equation) は、

$$\rho = \text{一定} \quad (1.1)$$

である。ここで、 $\rho$  は密度である。

ちなみに、液体では温度が上昇しても、あまり密度が変化しない。これを非膨張性 (nonexpansion) と呼ぶ。例えば、水では、温度  $273K$  で、密度は  $999.8kg/m^3$ 、温度  $313K$  で、密度は  $992.2kg/m^3$  である。 $40^\circ C$  上昇して  $0.8\%$  減少するだけである。より正確に言うと、水は定密度流体 (isopicnic fluid) である。つまり、水は、非圧縮性 (圧力に対する変化) と非膨張性 (温度に対する変化) の両方の性質を兼ね備えている。

## 1.2 支配方程式

流れを解くための支配方程式 (governing equation) として、

1. 連続の方程式
2. 運動方程式 (運動量方程式)
3. エネルギー方程式

の3つ式が基本である。

### 1.2.1 連続の方程式

非圧縮性流に対する連続の方程式は

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

となる。ここで、 $\vec{v}$  は流れの速度ベクトルで、 $\vec{v} = (u, v, w)$  である。 $u, v, w$  は  $x, y, z$  方向の速度成分 (velocity component) である。これは質量保存に対応し、基本的には閉ループの境界の一部から入ってきた流れは、境界の他の部分から、入ってきた分だけ出て行くということを意味している。言い換えれば、境界の全ての部分で、流れの出入りを勘定し、それらを足し合わせると 0 になる。

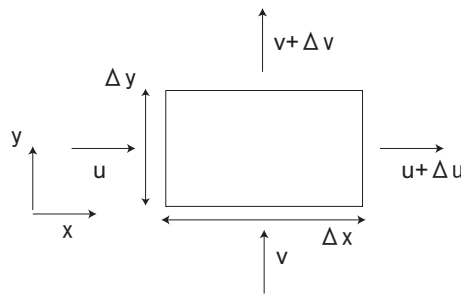


図 1.1: 検査体積への流れの出入り

流れの出入りを式で表せば (2次元の場合)

$$\begin{aligned} & (u + \delta u)\delta y - u\delta y + (v + \delta v)\delta x - v\delta x \\ &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\delta y - u\delta y + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right)\delta x - v\delta x \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta x\delta y \end{aligned} \quad (1.3)$$

となる。従って、これが 0 になるためには、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.4)$$

が得られる。

(参考) 上述した連続の式は、体積流量に基づいて導出されている。これを質量流量で考える場合には、 $u$  の代わりに、 $\rho u$  などと、それぞれの速度成分に密度を掛けて、上と同じことを行くと、連続の式が得られる。その結果は、

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (1.5)$$

である。非圧縮性流の場合には、密度は一定値であるから、密度を外に出すことができ、 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  となる。式 (1.5) は圧縮性流の場合の連続の式となる (ただし、これは、定常流の場合である。非定常流の場合には、密度の時間変化が左辺に加わる; 本シリーズのテキスト「圧縮性流体力学」を参照のこと)。



### 1.2.2 運動方程式

流体の流れに対する運動方程式はナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equations ; 1826 年、1845 年) と呼ばれるが、ここでは、簡単化のため、粘性項を無視した式を考える。これをオイラー方程式 (Euler equations; Leonhard Euler 1757 年) と呼ぶ。

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{x 方向}) \quad (1.6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{y 方向}) \quad (1.7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{z 方向}) \quad (1.8)$$

ここで、 $(X, Y, Z)$  は単位質量当りの体積力 (body force) である。体積力とは体積に比例した大きさを力で、重力 (gravitational force) は体積力の一種である。重力の場合には、 $(X, Y, Z) = (g_x, g_y, g_z)$  となる。ここで、 $g$  は重力加速度 (gravitaional acceleration) で、 $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$  である。また式 (1.6) から式 (1.8) までの運動方程式の左辺の括弧内の第 1 項は非定常項 (unsteady term)、第 2 項から第 4 項までは対流項 (あるいは移流項 ; convective terms) である。

### 1.2.3 エネルギー

流れ場中の温度分布を求めるときには、エネルギー式 (energy equation) を解く必要がある。エネルギーにはいくつかの種類があるが、それらを以下に述べる。なお、それぞれ単位質量当りで考える。(以下の式の運動エネルギーに密度  $\rho$  が入っていないことから分かる)

- 運動エネルギー (kinetic energy) :  $(1/2)v^2$
- 重力に関する位置エネルギー :  $gh$  ( $g$  は重力加速度、 $h$  は、例えば、地上からの高さ ; 空気の場合には、水に比べて密度が小さいために重力による位置エネルギーは無視できる)
- 圧力エネルギー :  $p/\rho$
- 内部エネルギー (internal energy) :  $e_i$   
内部エネルギーとは、物質の内部に蓄えられるエネルギーである。分子の運動エネルギーの増大は温度上昇に寄与する。また、分子間の距離が増大すると (これは位置エネルギーの増大でもある) 膨張する。しかし、非圧縮性流体では膨張は起こらないので、分子間距離に関する位置エネルギーは変化しない。つまり、非圧縮性流体では、熱エネルギーは分子の運動エネルギーのみとなり、内部エネルギーの変化は温度変化に直接関係してくる。これを式で表すと、

$$de_i = C(T) dT \quad (1.9)$$

ここで、 $C(T)$  は比熱 (specific heat) である。比熱とは、物質  $1kg$  を  $1K$  上昇するのに必要な熱量 ( $J$ ) である (比熱は、SI 単位では、 $J/(kg \cdot K)$ )。もし、比熱が一定であれば、

$$e_i = CT \quad (1.10)$$

と積分される。また、熱力学の第一法則 (first law of thermodynamics) より

$$dQ = de_i + pdv \quad (1.11)$$

ここで、 $dQ$  は加えた熱量、 $v$  は比容積 (単位質量当たりの体積; specific volume) である ( $v = 1/\rho$ )。ここで考えている非圧縮性流体では、体積変化がないので、 $dv = 0$  となり、その結果、

$$dQ = de_i \quad (1.12)$$

となる。つまり、加えた熱量は全て内部エネルギーの増加となる。

- エンタルピー:  $h$

エンタルピー (enthalpy) の定義は、内部エネルギーと圧力エネルギーを加えたものである。

$$h \equiv e_i + \frac{p}{\rho} \quad (1.13)$$

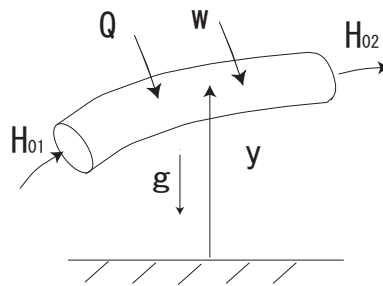


図 1.2: 流管での流入と流出におけるエネルギー収支

流体が運動している場合、これらのすべてのエネルギーを合計したものは

$$H_0 = \frac{1}{2}v^2 + e_i + \frac{p}{\rho} + gy \quad (1.14)$$

となる。ここで、 $H_0$  を全エンタルピー (total enthalpy) と呼ぶ。ちなみに流体が液体ではなく、ガスの場合には位置エネルギー (gravitational potential energy) は相対的に小さいので無視してよい。

$$H_0 = \frac{1}{2}v^2 + e_i + \frac{p}{\rho} \quad (\text{流体が気体の場合}) \quad (1.15)$$

流管 (流線を束ねて管のように考えたもの) に外から熱量  $Q$  が加えられ、かつ、外から仕事  $W$  がなされると ( $W < 0$  であれば外に対して仕事をする)、エネルギー収支は式として

$$Q + W = H_{02} - H_{01} \quad (1.16)$$

となる。ここで、 $H_{01}$  は流管入り口での全エンタルピー、 $H_{02}$  は流管出口での全エンタルピーである。外界から仕事もされなく、熱も供給されなければ、全エンタルピーは同じままである。

$$H_{02} = H_{01} \quad (1.17)$$

ここで外力 (external force) として保存力 (conservative force) を考える。  $\vec{X} = (X, Y, Z)$  を外力とすれば

$$\vec{X} = \text{grad } \Omega = \nabla \Omega \quad (1.18)$$

となる (保存力ではポテンシャルが存在する)。ここで、 $\Omega$  はポテンシャルで、 $\text{grad} = \nabla$  は勾配 (gradient) と呼ばれる微分演算子 (differential operator) である。具体的には、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  である。ポテンシャルの勾配が力となる。これを成分で書き下すと

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1.19)$$

となる。

重力の場合、重力は保存力的一种であるので、単位質量の場合、

$$X = g_x, \quad Y = g_y, \quad Z = g_z \quad \rightarrow \quad \Omega = g_x x + g_y y + g_z z \quad (1.20)$$

となる。これを使って式 (1.14) を書き直すと、

$$H_0 = \frac{1}{2} v^2 + e_i + \frac{p}{\rho} - \Omega \quad (1.21)$$

となる。確認として、鉛直上方を  $y$  の正の方向とすれば、 $g_y = -g$  となり、その結果、 $\Omega = -gy$  となり、式 (1.14) と式 (1.21) は一致する。

### 1.3 流線に沿う流れの方程式

ここで、流線 (streamline) を考える。流線とは、定常流で煙を流したときの煙が示す軌跡と一致するものである。逆に言えば、非定常流では流線は煙の示す線とずれを生じ、一致しない。

(参考) 流体の各粒子の運動経路を示す曲線は、流跡 (pathline あるいは particle path) と呼ばれる。

流線の定義は

$$\frac{\delta x}{\delta s} = \frac{u}{V}, \quad \frac{\delta y}{\delta s} = \frac{v}{V}, \quad \frac{\delta z}{\delta s} = \frac{w}{V} \quad (1.22)$$

である。ここで、 $s$  は流線に沿うパラメータで、ここでは、流線に沿う長さとする。従って、 $\delta s$  は流線に沿う微小な長さである。また、流線に沿う位置は、パラメータ  $s$  で決定される。つまり、 $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$  となる。流れの全速度  $V$  は、 $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  である。流線の定義に対する別な見方として、

$$\frac{\delta x}{u} = \frac{\delta y}{v} = \frac{\delta z}{w} = \delta t \quad (1.23)$$

と書ける。ここで、 $\delta t$  は微小時間である。

式 (1.22) を使って、 $u \partial u / \partial x$  を変形すると、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = V \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.24)$$

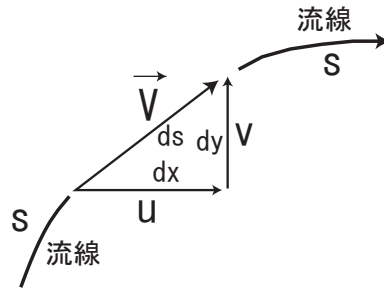


図 1.3: 流線と速度の関係

となる。従って、 $x$  方向の運動方程式の対流項 (移流項) は

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= V \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial y} + V \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= V \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \\ &= V \frac{\partial u}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.25)$$

となる。ここでは、以下の関係を使用している。

$$u = u(x(s), y(s), z(s)) \quad (1.26)$$

式 (1.25) を以下のようにベクトル表示で表すことも出来る。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{V} \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{s}} \quad (1.27)$$

ここで、 $\vec{V} = (u, v, w)$  であり、 $\delta \vec{s} = (\delta x, \delta y, \delta z)$  である。この式を見ると、左辺の対流項 (移流項) は、流線に沿う微分 (変化) であることが分かる。

$y$  方向および  $z$  方向の運動方程式の対流項も同様に表すことが出来、以上をまとめると、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = V \frac{\partial u}{\partial s} \quad (1.28)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = V \frac{\partial v}{\partial s} \quad (1.29)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = V \frac{\partial w}{\partial s} \quad (1.30)$$

となる。

以上より、 $x, y, z$  方向の運動方程式は (ただし、粘性は考慮しない) 左辺の加速度項を流線に沿う変化で表すと、

$$\rho V \frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.31)$$

$$\rho V \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.32)$$

$$\rho V \frac{\partial w}{\partial s} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.33)$$

となる。

これらの式の両辺にそれぞれ微小変位である  $\delta x, \delta y, \delta z$  を掛けると

$$\rho V \frac{\partial u}{\partial s} \delta x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \quad (1.34)$$

$$\rho V \frac{\partial v}{\partial s} \delta y = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta y \quad (1.35)$$

$$\rho V \frac{\partial w}{\partial s} \delta z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta z \quad (1.36)$$

となる。

それぞれの式を密度  $\rho$  で割って、左辺に式 (1.22) を代入すると、

$$V \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{u}{V} \delta s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \quad (1.37)$$

$$V \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{v}{V} \delta s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \delta y \quad (1.38)$$

$$V \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{w}{V} \delta s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \quad (1.39)$$

となる。

これらの3つの式を加えると

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right) \delta s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \quad (1.40)$$

となる。

これに外力を加えると

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \delta s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \delta s + \frac{\partial \Omega}{\partial s} \delta s \quad (1.41)$$

となる。

以上をまとめると

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - \Omega \right) = 0 \quad (1.42)$$

である。ここで、流れはバロトロピック流体 (barotropic fluid) を仮定している。

(参考) バロトロピック流体では、圧力  $p$  が密度  $\rho$  だけの関数で表わされると仮定している。等エントロピー流はこのバロトロピック流体の一部である。

$$p = p(\rho) \quad (1.43)$$

これを用いて、関数  $F(p)$  を以下のように定義する。

$$F(p) = \int^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad (1.44)$$

この  $F(p)$  を流線方向の長さ  $s$  で微分することを考える。

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial p} \times \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (1.45)$$

式 (1.44) を左辺に代入すると、結局

$$\frac{\partial}{\partial s} \int^p \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (1.46)$$

となる。(了)

式 (1.42) は、密度が一定の場合には非圧縮性流に対する、通常のベルヌーイ方程式 (Bernoulli's equation; Daniel Bernoulli 1738 年) となる。

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} - \Omega = \text{一定 (流線に沿って)} \quad (1.47)$$

右辺の一定値は、流線毎に違った値をとることができる。ちなみに、外力を重力とし、その作用する方向が鉛直方向 ( $y$  座標の負の方向) であるとすれば、ポテンシャル  $\Omega$  は

$$\Omega = -gy \quad (1.48)$$

となる。

非圧縮性流体に対するベルヌーイの式は、運動エネルギー、圧力エネルギー、外力のポテンシャルエネルギーの和が一定であることを示している。つまり、流れはこの束縛を受けて運動していることになる。

(参考) 水頭 (hydraulic head) について

式 (1.47) に式 (1.48) を代入すると、

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} + gy = C_1 = \text{const} \quad (1.49)$$

となる。この式を  $g$  で割ると、

$$\frac{1}{2} \frac{V^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + y = C_2 = \text{const} \quad (1.50)$$

となる。この式は、各項を高さの次元で表わしたもので、左辺第1項は、速度ヘッド (velocity head)、第2項は、圧力ヘッド (pressure head)、第3項は、位置ヘッド (elevation head) と呼ばれる。ちなみに右辺の一定値は、全ヘッド (total head) と呼ばれる。この式が意味するところは、大気圧 (1atm) が、水の高さで 10m にほぼ等しい、と言われるのと同じ考え方である。(了)

一方、一様流の中に物体が置かれていて、そのまわりの流れを考える場合、ベルヌーイの関係式 (1.47) は、

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (1.51)$$

となる。ここで、 $( )_{\infty}$  は一様流での値を示し、右辺は、例えば、物体表面上のある場所での値である。基本的には、この式は、同じ流線上で成立するが、一様流の場合には、すべての流線が上流では同じ状態であるので、流れ場の全領域で一定となる。また、この式は総圧  $p_0$  に等しくなる（総圧とは、流れを止めたときに発生する圧力である）。

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 \quad (1.52)$$

上述したように、一様流の場合には、この総圧は流線ごとではなく、流れ場全体で同じ値をとる。（参考） 実際には、圧力の代わりに、圧力係数 (pressure coefficient) が使われる。圧力係数は、無次元数であるために汎用性がある。圧力係数の定義は、

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{(1/2)\rho_{\infty}V_{\infty}^2} \quad (1.53)$$

である。この式にベルヌーイの式を代入すると、

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{(1/2)\rho_{\infty}V_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}}\right)^2 \quad (1.54)$$

となる。これは大変便利な式である。 $C_p \leq 1$  であることに注意する必要がある。ただし、圧縮性流の場合には、 $C_p$  が 1 を越えてくる。これに関しては、テキスト「圧縮性流体力学」を参照のこと。（了）

（参考） ポテンシャル流の場合には、以下の方法でも、ベルヌーイの式が誘導される。粘性を無視したオイラーの方程式は、ベクトル表示で以下のように書くことができる（テキスト「粘性流体力学」を参照のこと）。

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p \quad (1.55)$$

この中の対流項  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  に、以下のベクトルの公式を適用して変形する。

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} \quad (1.56)$$

ここで、微分演算子  $\text{rot}$  とは、 $\text{rot} = \nabla \times$  のことである。この式に、 $\vec{A} = \vec{v}$ 、 $\vec{B} = \vec{v}$  を代入すると、

$$\nabla \vec{v}^2 = 2(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + 2\vec{v} \times \vec{\omega} \quad \rightarrow \quad (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (1.57)$$

となる。ここで、 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$  で、これは渦度である。ポテンシャル流とは、渦度が 0 の流れであるから、 $\vec{\omega} = 0$  となる。式 (1.57) を式 (1.55) に代入すると、

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] = -\nabla p \quad (1.58)$$

となる。また、ポテンシャル流では、速度は、速度ポテンシャルの勾配で表わされるので、 $\vec{v} = \nabla \Phi$  となる。これを使うと、式 (1.58) は、

$$\rho \left[ \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] = -\nabla p \quad (1.59)$$

と書くことができる。ここでは、時間微分と空間微分の順序を入れ替えている。以上より、式(1.59)は、

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (1.60)$$

となる。定常流の場合には、 $\partial \Phi / \partial t = 0$ となる。(了)

今考えている流体に、熱量  $Q$  だけが加えられて、外部から仕事が行なわれないならば(つまり  $W = 0$ )、式(1.16)より

$$\begin{aligned} Q &= H_{02} - H_{01} \\ &= \left( \frac{1}{2}v^2 + e_i + \frac{p}{\rho} - \Omega \right)_2 - \left( \frac{1}{2}v^2 + e_i + \frac{p}{\rho} - \Omega \right)_1 \\ &= e_{i2} - e_{i1} + \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - \Omega \right)_2 - \left( \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} - \Omega \right)_1 \end{aligned} \quad (1.61)$$

となる。2つの括弧の式は、同じ流線上にあれば、ベルヌーイの式(1.47)より同じ値になる。従って、これらは相殺され、残るのは

$$Q = e_{i2} - e_{i1} = C(T_2 - T_1) \quad (1.62)$$

である。ここで、右辺最後の式は、式(1.10)を利用しており、熱量的完全ガス (calorically perfect gas) の場合である。

ここがポイントであるが、非圧縮性流では、外から加えられた熱エネルギーは、内部エネルギーの増加のみに使われる。つまり、運動方程式から得られる機械的エネルギーと、熱力学から得られる熱的エネルギーは独立に平衡関係を持つ。言い換えれば、運動方程式とエネルギー方程式は、別々に解けばよいことになる。(ただし、自然対流の場合は両方をカップリングして解く必要があることに注意。これに関しては、テキスト「粘性流体力学」を参照のこと)

非圧縮性流体では、流体の温度は外から加えられた熱エネルギーのみにより決まる。これは、圧縮性流体における温度が、圧力や速度の変化によっても影響を受けるのとは対照的である。

## 1.4 ポテンシャル流の解

ポテンシャル流の速度ポテンシャル  $\phi$  は、ラプラス方程式の解になっている。

$$\nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \quad (1.63)$$

ラプラス方程式の解は、グリーンの定理により、点  $P(x, y, z)$  での速度ポテンシャル  $\phi$  は、

$$\phi(x, y, z) = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) dS + \iint_S \phi \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) dS \quad (1.64)$$

と表せる。ここで、 $n$  および  $\nu$  での微分は、

$$\frac{\partial}{\partial n} = (n_1, n_2, n_3) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \nu} = (n_1, n_2, n_3) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \quad (1.65)$$



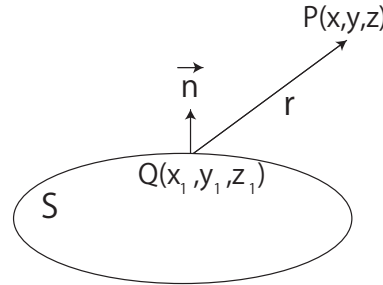


図 1.4: 吹き出しと二重吹き出しによる速度ポテンシャル

である。また  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  は、表面  $S$  に垂直方向の単位ベクトルである。

$r$  は、点  $P(x, y, z)$  と特異性（吹き出しや二重吹き出し）の位置  $(x_1, y_1, z_1)$  までの距離で、

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (1.66)$$

である。ちなみに、式 (1.64) において、吹き出しと二重吹き出しの速度ポテンシャルは、

$$\text{吹き出し: } -\frac{1}{4\pi r} \quad \text{二重吹き出し: } \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) \quad (1.67)$$

である。この式を使って、飛行機周りの流れ（ポテンシャル流）を解く場合、式 (1.64) における吹き出しと二重吹き出しの強さを未知数とした次の式を用いる。

$$\phi(x, y, z) = \iint_S C_1 \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) dS + \iint_S C_2 \frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) dS \quad (1.68)$$

この未知の係数  $C_1, C_2$  は境界条件（例えば、物体表面に垂直方向の成分は 0）から決定される。

## 1.5 吹き出し

湧き出しとも言い、英語では source である（ちなみに  $v_r < 0$  の場合は吸い込み (sink) である）。渦は渦が発生した場所では強いが、その後すぐに拡散 (diffusion)（渦度が大きい場所から小さい場所に散らばる）して、弱くなる。従って、流れの大部分は渦無し流れと考えてもよい。渦無し流れをポテンシャル流 (potential flow) と呼ぶ。

渦度  $\vec{\omega}$  の定義は

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} \quad (1.69)$$

である。

$\vec{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$  として、成分で書き下すと

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.70)$$

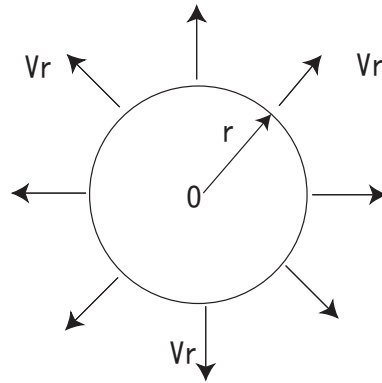


図 1.5: 吹き出し

となる。渦無し条件は、渦度が 0 であるので、

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.71)$$

となる。この式に対して、次の速度ポテンシャル  $\phi$  を導入すると、この渦なしの式を恒等的に満たすことができる。

$$u \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v \equiv \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.72)$$

これをベクトルで表すと

$$\vec{V} = \nabla \phi = \text{grad } \phi, \quad \vec{V} = (u, v, w) \quad (1.73)$$

となる。

吹き出しとは、極座標 (polar coordinates) で考えたとき、半径方向の速度成分  $v_r$  のみを持ち、かつ、その大きさが半径  $r$  のみに依存するものである。

単位時間あたりに吹出す量 (体積流量) を  $\sigma$  とすると、 $\sigma$  は

$$\sigma = 4\pi r^2 v_r \quad (1.74)$$

となる。従って、吹き出しの速度は

$$v_r = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \quad (1.75)$$

となる。つまり、半径の 2 乗で減衰する。

速度ポテンシャルを  $\phi$  とすると、 $v_r$  は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (1.76)$$

と表わせるので、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \quad (1.77)$$

となる。従って、吹き出し流の速度ポテンシャル  $\phi$  は

$$\phi = -\frac{\sigma}{4\pi r} \quad (1.78)$$

となる。これが3次元の場合における吹き出し流のポテンシャルである。ちなみに、 $\sigma$  が負の符号のときは吸い込み (sink) となる。

吹き出しが存在している場所 (位置) では、具体的には、 $x = x_1, y = y_1, z = z_1$  においては、吹き出し量と速度成分の関係は

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{v} \quad (1.79)$$

となる。この  $\sigma$  は単位時間当たりの吹き出し量である。一方、吹き出しが存在していない場所では、

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{v} \quad (1.80)$$

となる。

(参考) 式 (1.79) が吹き出し量を表す理由は以下のものである。吹き出しの存在する点  $Q$  を囲む面  $S$  を考える。Gauss の発散公式 (体積積分と面積分との変換) によれば

$$\iiint \text{div } \vec{v} dV = \iint \vec{n} \cdot \vec{v} dS \quad (1.81)$$

となる。式 (1.79) を式 (1.81) に代入すると、

$$\iiint \sigma dV = \iint \vec{n} \cdot \vec{v} dS \quad (1.82)$$

となる。右辺は面から出て行く流量 (プラスであれば出て行く、マイナスなら入ってくる量) であるので、これに等しいということは、 $\sigma$  は吹き出し量を表わしていることになる。(了)

式 (1.72) を式 (1.79) に代入すると、速度ポテンシャル  $\phi$  に対する式が得られる。

$$\sigma = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (1.83)$$

この式を微分演算子を使って表わすと

$$\nabla^2 \phi = \sigma \quad (1.84)$$

となる。この型の偏微分方程式 (partial differential equation) をポアソン方程式 (Poisson equation) と呼ぶ。

一方、点  $Q$  以外の点では、 $\sigma = 0$  であるので、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.85)$$

である。この型の偏微分方程式をラプラス方程式 (Laplace equation) と呼ぶ。

これまでは空間上の一点に吹き出しがある場合を考えたが、吹き出しが空間に分布している場合には、速度ポテンシャル  $\phi$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.86)$$

ここで、 $(x, y, z)$  は観測点  $P$  を、また  $(\xi, \eta, \zeta)$  は吹出しが存在している場所を表し、 $\sigma$  は単位体積・単位時間当たりの吹出し量である。

(参考) 流れが高速になり、圧縮性を考慮する必要がある場合

流れが高速になり、圧縮性を考慮する必要がある場合でも、ポテンシャル流は存在する。この場合、渦無しの流れ (ポテンシャル流) を表す式は以下のように修正される。(テキスト「圧縮性流体」に詳しく述べられているので参照のこと)

- 亜音速の場合 ( $M_\infty < 1$ ):  $x$  方向に一様流  $M_\infty$  がある場合のポテンシャル流の方程式 (線形近似された方程式) は、以下の形をとる。ただしここで注意することは、この速度ポテンシャル  $\phi$  は、擾乱速度に対するものである。

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.87)$$

となる。上述したように、この速度ポテンシャル  $\phi$  は、擾乱速度に対するもので、全体の速度はこの擾乱速度に一様流の速度を加えたものである。

$$\vec{V} = U_\infty \vec{i} + \text{grad } \phi \quad (\vec{i} \text{ は } x \text{ 方向の単位ベクトル}) \quad (1.88)$$

ここで、 $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$  とおいて、式 (1.87) を  $\beta^2$  で割ると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad (1.89)$$

となる。ここで、 $\tilde{y} = \beta y$ 、 $\tilde{z} = \beta z$  である。この式は非圧縮性流の場合と同じ形をしている。つまり、非圧縮性流れに変換されたことになる。従って、非圧縮性流でのポテンシャルの式である式 (1.78) より、

$$\phi = \frac{\sigma}{4\pi \sqrt{x^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}} \quad (1.90)$$

となる。これをもとの座標  $(x, y, z)$  で表せば、

$$\phi = \frac{\sigma}{4\pi \sqrt{x^2 + \beta^2(y^2 + z^2)}} = \frac{\sigma}{4\pi \sqrt{x^2 + (1 - M_\infty^2)(y^2 + z^2)}} \quad (1.91)$$

となる。この速度ポテンシャル  $\phi$  が一定の値をとる面は、二次曲面 (surface of the second order) である回転楕円面 (ellipsoid) となる。これは、上式を変形することにより得られる。

$$\left( \frac{x}{\sigma/4\pi\phi} \right)^2 + \left( \frac{y}{\frac{\sigma/4\pi\phi}{\beta}} \right)^2 + \left( \frac{z}{\frac{\sigma/4\pi\phi}{\beta}} \right)^2 = 1 \quad (1.92)$$

流線 ( $\psi = \text{const}$ ) はこの速度ポテンシャル面 ( $\phi = \text{const}$ ) に垂直となる。つまり、圧縮性が入ってくると、亜音速流の場合、非圧縮流での球面が変形して、回転楕円面となる。

- 超音速の場合 ( $M_\infty > 1$ ):  $x$  方向に超音速の一樣流  $M_\infty$  がある場合の、擾乱速度に対するポテンシャル流の方程式は

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.93)$$

となる (詳細は、テキスト「圧縮性流体力学」を参照のこと)。ここで、 $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$  として、この式を  $\beta^2$  で割ると、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad (1.94)$$

となる。ここで、 $\tilde{y} = \beta y$ 、 $\tilde{z} = \beta z$  である。この式は虚数単位  $i$  を使って以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (i\beta y)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (i\beta z)^2} = 0 \quad (1.95)$$

この式は非圧縮性流の場合と同じ形をしているので、速度ポテンシャル  $\phi$  は、式 (1.78) より、

$$\phi = \frac{\sigma}{4\pi \sqrt{x^2 + (i\beta y)^2 + (i\beta z)^2}} = \frac{\sigma}{4\pi \sqrt{x^2 - \beta^2(y^2 + z^2)}} \quad (1.96)$$

となる。この速度ポテンシャル  $\phi$  が一定の値をとる面は、二次曲面である回転双曲面 (2葉: hyperboloid of two sheets) となる。これは、上式を変形することにより得られる。

$$\left( \frac{x}{\sigma/4\pi\phi} \right)^2 - \left( \frac{y}{\sigma/4\pi\phi/\beta} \right)^2 - \left( \frac{z}{\sigma/4\pi\phi/\beta} \right)^2 = 1 \quad (1.97)$$

流線 ( $\psi = const$ ) はこの速度ポテンシャル面 ( $\phi = const$ ) に垂直となる。つまり、速度ポテンシャル面は、流れが音速を超えると、回転楕円面から回転双曲面に変化する。

## 1.6 2重吹き出し

2重吹き出し (doublet) は、吹き出しと吸い込みをペアにして配置し、その間隔を 0 に持つていくことによって得られる流れである。詳細は、2.6 節を参照のこと。

吹き出しと吸い込みを  $x$  軸上に配置する場合を考える。具体的には、吹き出しを  $(-a, 0, 0)$  に、吸い込みを  $(a, 0, 0)$  に配置する。これらの特異性 (singular) が作り出す速度ポテンシャルは、式 (1.78) より以下のように書くことができる。

$$\phi = -\frac{\sigma}{4\pi r_1} + \frac{\sigma}{4\pi r_2} \quad (1.98)$$

ここで、 $r_1$ 、 $r_2$  は、

$$r_1 = \{(x+a)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}, \quad r_2 = \{(x-a)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2} \quad (1.99)$$

である。

$$r = \{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2\}^{1/2} \quad (1.100)$$

と置けば、 $r_1, r_2$  は、以下のようにテーラー展開で近似できる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1} &= \left(\frac{1}{r}\right)_{\xi=0} + \left(\frac{\partial 1}{\partial \xi r}\right)_{\xi=0} (-a) + O(a^2) \\ \frac{1}{r_2} &= \left(\frac{1}{r}\right)_{\xi=0} + \left(\frac{\partial 1}{\partial \xi r}\right)_{\xi=0} (+a) + O(a^2)\end{aligned}$$

これを、式 (1.98) に代入すると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{2\sigma a}{4\pi} \left(\frac{\partial 1}{\partial \xi r}\right)_{\xi=0} + O(a^3) \quad (1.101)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial 1}{\partial \xi r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{x - \xi}{r^3} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial 1}{\partial \xi r}\right)_{\xi=0} = \frac{x}{r^3} \quad (1.102)$$

この式を式 (1.101) に代入し、

$$a \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \sigma a = \mu = \text{const} \quad (1.103)$$

の操作を行うと、

$$\phi(x, y, z) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{r^3} \quad (1.104)$$

となる。これが、2重吹き出しの軸が  $x$  軸の負の方向にある場合の、2重吹き出しの作り出す速度ポテンシャルである。座標を回転すれば、軸が任意の方向に向いた場合の2重吹き出しの速度ポテンシャルを得ることができる。

式 (1.104) を変形すると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} \quad (1.105)$$

となる。ここで、 $\theta$  は、 $r$  軸と  $x$  軸のなす角である。2次元の場合の2重吹き出しの速度ポテンシャルの式 (2.43) と比較すると、両者は良く似ていることが分かる。

(参考) 式 (1.67) を利用しても2重吹き出しのポテンシャルは求められる。今考えている2重極は、2重極の軸が、 $\nu = -x_1$  であるので、

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \frac{\partial}{\partial -x_1} \left(-\frac{1}{4\pi r}\right) \quad (1.106)$$

となる。ここで、

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial -x_1} = \frac{x - x_1}{r} \quad (1.107)$$

となる。これを代入すれば、

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial r}{\partial -x_1} = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{x - x_1}{r}\right) \quad (1.108)$$

今2重吹き出しは原点にあるので、ここで、 $x_1 = 0$  を代入すると、

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{x}{r^3}\right) \quad (1.109)$$

となる。係数(2重吹き出しの強さ)は任意に決定できることに注意。つまり、式の形が一致していればよい。

## 1.7 渦

渦 (vortex) は大変重要な流れの要素である。これは、ナビエ・ストークス方程式の解である。渦巻くという自然現象は我々の周囲随所で観察される。

通常の渦は中心付近が剛体的に回転しており、そこでは渦度が存在している。しかし、その外側の領域では渦度が存在しない。つまり、渦度は0である。ここでの流体の要素は、渦要素渦中心まわりに回転しないような姿勢で回転する。渦の中心部を渦核 (core) と呼ぶ。

理想的な基本渦 (Rankine 渦) を考える。この渦が作り出す速度は周方向成分 ( $\theta$  方向) のみで ( $V = v_\theta$ ) 半径方向成分は0である ( $v_r = 0$ )。渦の中心部分である渦核 (vortex core) では、剛体のように一体となって回転している (剛体回転; solid rotation)。

$$v_\theta = \omega r \quad (1.110)$$

ここで、 $\omega$  は角速度 (angular velocity) である。

$z$  方向の渦度を  $\zeta$  とすれば、デカルト座標  $(x, y, z)$  および極座標  $(r, \theta, z)$  表示で

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (1.111)$$

となる。半径方向の速度成分  $v_r$  は0より、

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta r}{\partial r} = 2\omega \quad (1.112)$$

である。つまり、渦度は角速度の2倍の大きさを持つ。

渦核の外 (渦の中心から離れた所) では、渦度が0であるので、式 (1.112) と同様にして、

$$\frac{\partial}{\partial r}(v_\theta r) = 0 \quad (1.113)$$

となる。これを解くと

$$v_\theta = \frac{C}{r} \quad (1.114)$$

となり、ここで、 $C$  は一定値である。これがポテンシャル流の回転速度である。

渦核の外縁で両方の速度が等しくなるので、式 (1.110) と式 (1.114) より、

$$\omega a = \frac{C}{a} \rightarrow C = \omega a^2 \quad (1.115)$$

以上、整理すると

- 渦核内では

$$v_\theta = \omega r \quad (1.116)$$

- 渦核外では

$$v_\theta = \frac{\omega a^2}{r} \quad (1.117)$$

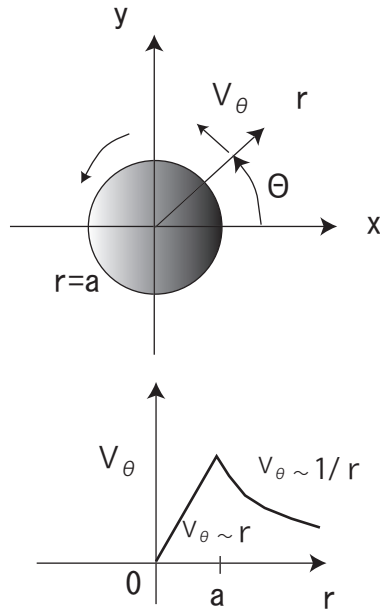


図 1.6: 剛体回転とポテンシャル回転による渦モデル

この渦流れに対する圧力分布は、半径方向の運動方程式より得られる。

$$\rho \left( -\frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.118)$$

渦核の外では、周方向速度  $v_\theta$  に対して、式 (1.117) を使い、 $r$  で積分すると、圧力  $p$  は

$$p = -\frac{\rho\omega^2 a^4}{2} \frac{1}{r^2} \quad (1.119)$$

ただし、無限遠方で、圧力は 0 としている。

$$p = 0 \quad \text{at} \quad r \rightarrow \infty \quad (1.120)$$

同様に、渦核の内側では

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + p_0 \quad (1.121)$$

ここで、 $p_0$  は、渦中心 ( $r = 0$ ) での圧力である。 $r = a$  で圧力が等しくなるようにマッチングする。つまり、式 (1.119) と式 (1.121) を等置すると、 $p_0$  が決まる。

$$p_0 = -\rho\omega^2 a^2 \quad (1.122)$$

結局、渦核内での圧力は、

$$p = -\frac{\rho\omega^2 a^2}{2} \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (1.123)$$

となる。つまり、放物線分布である。ここで注意したいことは、渦の中心では圧力は必ず下がることである。台風の中心での圧力降下や、洗濯機の中の水面の降下がよくこの特徴を表している。



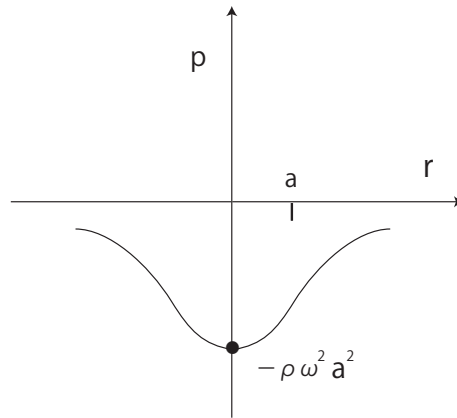


図 1.7: 渦が誘起する圧力分布

## 1.8 循環

流体中の閉曲線に沿って速度の接線成分を積分したものを循環 (circulation) と呼ぶ。

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (1.124)$$

これは、Stokes の定理を用いて以下のように書き換えられる。

$$\Gamma = \iint (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iint (\text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iint \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad (1.125)$$

ここで、渦度の定義式が使われている。

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \quad (1.126)$$

つまり、循環を生じさせるためには、そのループの中に渦度が存在する必要がある。翼周りに循環がないと揚力 (lift) は発生しない (後述 ; Kutta-Joukowski の定理)。循環は、迎角を付けることや、翼の反り (camber) により作られる。従って、迎角が 0 の場合、対称翼では揚力は生じない。

## 1.9 トムソンの循環定理

これはケルビン (Lord Kelvin) の定理とも呼ばれる。流れとともに (流れに運ばれて) 変化する循環の時間変化を考える。

$$\frac{D\delta\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}(u\delta x + v\delta y + w\delta z) \quad (1.127)$$

ここで、簡単化のために、右辺第 1 項だけを取り出して考える。2 つの積からなる量の実質微分として

$$\frac{Du\delta x}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\delta x + u\frac{D\delta x}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\delta x + u\delta u \quad (1.128)$$

ここで、最後の式の最後の項では以下のように形式的に考えてもよい。

$$\frac{D\delta x}{Dt} = \delta \frac{Dx}{Dt} = \delta u \quad (1.129)$$

これらの各方向成分をまとめると

$$\frac{D\delta x}{Dt} = \delta u, \quad \frac{D\delta y}{Dt} = \delta v, \quad \frac{D\delta z}{Dt} = \delta w \quad (1.130)$$

となる。

以上より、式(1.128)は、

$$\frac{D}{Dt}(u\delta x) = \frac{Du}{Dt}\delta x + u\delta u = \left(X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x + u\delta u \quad (1.131)$$

となる。ここでは、オイラーの運動方程式 ( $x$  方向成分) が使われている。

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.132)$$

$x, y, z$  方向をまとめると

$$\frac{D}{Dt}(u\delta x) = \left(X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta x + u\delta u, \quad (1.133)$$

$$\frac{D}{Dt}(v\delta y) = \left(Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta y + v\delta v, \quad (1.134)$$

$$\frac{D}{Dt}(w\delta z) = \left(Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta z + w\delta w \quad (1.135)$$

となる。これらをすべて足し合わせると

$$\frac{D}{Dt}(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - \frac{1}{\rho}\delta p + \delta \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (1.136)$$

となる。

ここで、体積力  $\vec{X}$  は、ポテンシャル  $\Omega$  より

$$\vec{X} = (X, Y, Z) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \quad (1.137)$$

となる。これを使うと、式(1.127)は

$$\frac{D\delta\Gamma}{Dt} = \delta\Omega - \frac{1}{\rho}\delta p + \delta \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \quad (1.138)$$

となる。これを点 A から点 A まで、あるループの経路に沿って一周積分すると

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \left[\Omega - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right]_A^A = 0 \quad (1.139)$$

となる。以上のことから

流体とともに移動する、ある閉曲線に沿って取った循環の値は時間とともに変化しない。

これをトムソン (Thomson) の定理、あるいは、ケルビン (Lord Kelvin) の循環定理 (1867) と呼ぶ。

## 1.10 ヘルムホルツの渦定理

これはヘルムホルツ (Helmholtz, 1858) により示された渦度の変化に関する定理である。渦管の側面に取った閉曲線  $C$  周りの循環の値は、それを貫く渦線が存在しないので 0 となる。従って、ケルビンの定理より、その循環は時間とともに変化しないので、 $\Gamma = 0$  のままである。このことは、渦度の成分が時間が経過してもこの面内に入り込まないことを意味している。つまり、

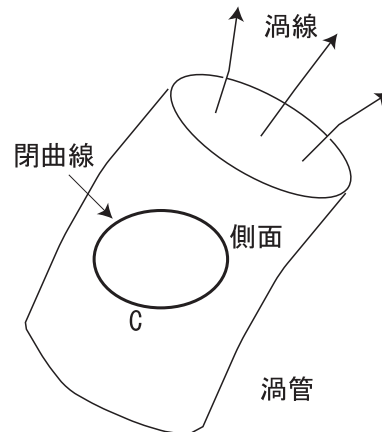


図 1.8: ある渦管の側面での循環

- 渦管の側面上にあった流体要素は時間が経ってもその渦管の側面上に存在する。

このことから、

- 渦管や渦糸は流体要素とともに移動し、同一流体要素で構成されている。

つまり、

- 渦管は消滅したり、発生したりしない。

あるいは、

- 渦管を囲む閉曲線は常に同じ渦管を囲んでおり、この閉曲線周りの循環は時間的に変化しない。

ということになる。以上のことをまとめると、

- 渦管の渦の強さ  $\Gamma = \int \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS \approx \omega S$  は、渦管のどの断面でも同じで、時間的に変化しない。

これを、ヘルムホルツの渦定理という。

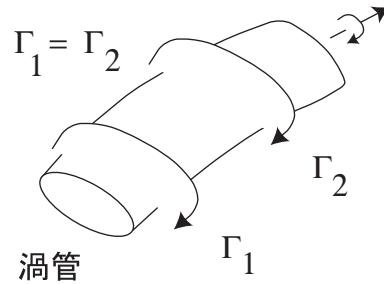


図 1.9: 渦管周りの循環は一定

### 1.10.1 渦の誘導する速度

渦が存在すると、その周りに速度が誘起される。ここでは、これについて勉強する。  
非圧縮性流体の連続の方程式は

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.140)$$

となる。

渦度  $\vec{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$  は、速度成分を使って

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.141)$$

と書ける。

連続の式は、 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  であるので、ベクトルポテンシャル  $\vec{E}$  が定義される。

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{E} \quad (1.142)$$

なぜならば、上式に演算子  $\nabla \cdot$  を施すと、ベクトルの公式より恒等的に 0 となり、連続の式を満たすことになる。

(参考) 電磁場の世界では、磁束密度  $\vec{B}$  は  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  より、電磁ポテンシャル  $\vec{A}$  が定義される。

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.143)$$

(参考了)

ベクトルポテンシャルの成分を

$$\vec{E} = (E, F, G) \quad (1.144)$$

とすれば、速度の各成分は式 (1.142) より

$$u = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} \quad (1.145)$$

となる。これを渦度の定義式 (1.141) の速度成分に代入すると

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) - \nabla^2 E \quad (1.146)$$

$$\eta = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) - \nabla^2 F \quad (1.147)$$

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) - \nabla^2 G \quad (1.148)$$

となる。

もし、

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (1.149)$$

であるならば、式 (1.146) から式 (1.148) は

$$\nabla^2 E = -\xi, \quad \nabla^2 F = -\eta, \quad \nabla^2 G = -\zeta \quad (1.150)$$

となる。これらは、ポアソン方程式である。

また、これらの式は、吹き出し流れが作り出すポテンシャルの式と全く同じ形をしているので、吹き出し流れのところで述べたのと同様な方法で (式 (1.86)) 関数  $E, F, G$  は以下のように求められる。

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\xi(x_1, y_1, z_1)}{r} dx_1 dy_1 dz_1 \quad (1.151)$$

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\eta(x_1, y_1, z_1)}{r} dx_1 dy_1 dz_1 \quad (1.152)$$

$$G(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\zeta(x_1, y_1, z_1)}{r} dx_1 dy_1 dz_1 \quad (1.153)$$

渦度のある位置  $(x_1, y_1, z_1)$  から点  $P(x, y, z)$  までの距離  $r$  は

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (1.154)$$

である。

このようにして、 $E(x, y, z)$ ,  $F(x, y, z)$ ,  $G(x, y, z)$  が求められれば、式 (1.145) より、任意の点  $(x, y, z)$  での速度  $(u, v, w)$  が得られる。

## 1.11 流れの境界条件

流れを解くときには境界条件が重要である。粘性を考慮したときには、物体が静止している場合には、流れの速度は物体表面上で 0 となる (noslip condition)。

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (1.155)$$

もし、物体が動いている場合には、

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (1.156)$$

となる。

一方、粘性を無視した場合には流れは物体表面に沿って流れなければならない (slip condition)。物体が静止している場合には、物体に垂直方向の速度成分が 0 であるという条件を課する。

$$V_n = 0 \quad (1.157)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

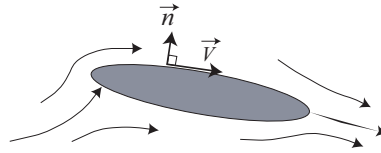


図 1.10: 粘性がない場合の物体表面での境界条件

もし物体が運動している場合には、物体の運動速度  $\vec{V}_B$  の、物体表面に垂直方向成分が、流体の速度ベクトルの、同じ方向の速度成分に等しくなるようにする。

$$\vec{V}_B \cdot \vec{n} = V_n \quad (1.158)$$

ここで、 $\vec{n}$  は物体表面に垂直方向の単位ベクトルである。

ちなみに、物体が加速度運動をしている場合の物体表面での圧力の境界条件は、以下のように圧力勾配 (ノイマン条件) から決定する。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = - \left( \frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \cdot \vec{n} \quad (1.159)$$

ここで、 $\vec{n}$  は物体表面外向き法線単位ベクトルである。

## 第2章 複素速度ポテンシャル

複素関数 (functions of a complex variable) を使うと、2次元流れを表すのに大変便利である。ここでは、複素速度ポテンシャルを使った流れの表し方について勉強する。

### 2.1 複素速度ポテンシャル

流れ関数  $\psi$  および速度ポテンシャル  $\phi$  は、それぞれラプラスの方程式の解である。これらを両方取り込んで、複素数 (複素関数) の形にする。複素平面 (complex number plane) の定義は

$$z = x + iy \quad (2.1)$$

である。ここで、 $i$  は虚数単位で、 $i = \sqrt{-1}$  である。ちなみに、この式で、 $x$  は実部、 $y$  は虚部である。

次に、この複素平面上に、複素速度ポテンシャル  $W(z)$  として、以下の複素関数  $f(z)$  を考える。

$$W(z) = f(z) = \phi + i\psi \quad (2.2)$$

ここで、 $\phi$  は実部、 $\psi$  は虚部の変数である。

#### 2.1.1 微分

複素関数の微分は以下のように定義される。

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.3)$$

ここで、 $\Delta z$  を 0 に近づけると、 $\Delta x : \Delta y$  の比がどのようなようであっても、この値が一定値になるとき、微分が存在する。つまり、微分を計算する点  $P$  にどのような方向から近づけても同じ値を取る必要がある。

#### 2.1.2 正則

$f(z)$  が微分可能で、微分値  $df/dz$  を有するとき、関数  $f(z)$  は正則 (regular) であるという。

今考えている複素関数  $f(z)$  に微分の定義を代入すると

$$\frac{dW}{dz} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y)] + i[\psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \psi(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

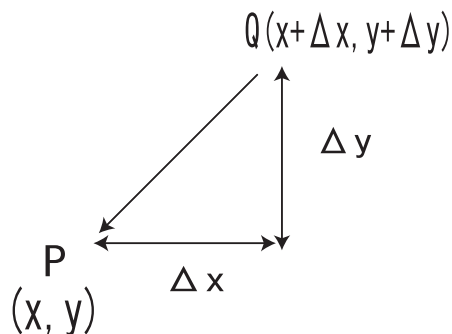


図 2.1: 複素関数の微分

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y\right) + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y\right)}{\Delta x + i \Delta y} \\
 &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$\Delta x : \Delta y$  がどのような比であっても、これが一定の値を持つためには、

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 1 : i \quad (2.5)$$

である必要がある。これを展開すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.6)$$

これをコーシー・リーマンの式 (the Cauchy-Riemann equations) と呼ぶ。これは、複素関数  $f(z)$  が微分可能 (differentiable) であるための必要十分条件 (necessary and sufficient condition) で、このとき、 $f(z)$  は正則となる。この関係式から、 $\phi$  だけの式、あるいは、 $\psi$  だけの式を導くと、それぞれラプラスの方程式 (Laplace's equation) が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

この関係式は流体力学にとって大変都合である。 $\phi$  および  $\psi$  をそれぞれ流体力学の速度ポテンシャルおよび流れ関数と考えれば、式 (2.7) はすでに満たされていることになる。

つまり、流体力学では、速度ポテンシャル  $\phi$  は渦度=0 を恒等的に満足するものとして以下のように定義される。

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.8)$$

一方、流れ関数  $\psi$  は連続の式を恒等的に満足するものとして以下のように定義される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.9)$$



(注意) 流れ関数は 2 次元流れ (plane flow) と同様に軸対称流れ (axisymmetric flow) でも定義できるが、3 次元流れでは定義できない。(了)

(参考) 式 (2.8)、式 (2.9) をベクトル表示すると、

$$\vec{v} = \nabla\phi = \text{grad}\phi, \quad \vec{v} = \nabla\psi \times \vec{k} \quad (2.10)$$

となる。ここで、 $\vec{k}$  は  $(x, y, z)$  座標における  $z$  方向の単位ベクトルである。(了)

(参考) ラプラス方程式を満たすものを調和である (harmonic) と言い、その関数を調和関数 (harmonic function) と呼ぶ。(了)

$W$  の  $z$  微分に関して、 $z = x$  として、 $x$  方向の微分を考えると、

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv \quad (2.11)$$

となる。また、 $z = iy$  として微分すると、

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial iy} + i\frac{\partial\psi}{\partial iy} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = -iv + u \quad (2.12)$$

となる。従って、一般的に

$$\frac{dW}{dz} = u - iv \quad (2.13)$$

となる。

これを共役速度 (conjugate velocity) と呼ぶ。つまり、速度を求めるときには、複素速度ポテンシャル  $W(z)$  を複素変数  $z$  で微分すればよい。ちなみに、この式の共役をとると

$$\overline{\frac{dW}{dz}} = \frac{d\overline{W}}{d\bar{z}} = u + iv \quad (2.14)$$

となる。速度の絶対値は

$$\frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{d\overline{W}}{d\bar{z}} = (u - iv)(u + iv) = u^2 + v^2 \quad (2.15)$$

として求められる。

## 2.2 一様流

一様流 (uniform flow) とは、速度一定の流れで、例えば、 $x$  軸に平行で、 $y$  方向には変化しない流れである。その速度の絶対値を  $U$  とすると、この流れに対する複素速度ポテンシャルは

$$W = Uz \quad (2.16)$$

である。この検証として、上式の左辺および右辺に、式 (2.2) と式 (2.1) を代入すると

$$W = \phi + i\psi = U(x + iy) \rightarrow \phi = Ux, \quad \psi = Uy \quad (2.17)$$

となる。したがって、速度成分  $(u, v)$  は

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

となり、確認された。

一様流が迎角  $\alpha$  を持つときには

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U \cos \alpha - iU \sin \alpha = U(\cos \alpha - i \sin \alpha) = Ue^{-i\alpha} \quad (2.19)$$

したがって、一様流の複素速度ポテンシャルは

$$W = Ue^{-i\alpha}z \quad (2.20)$$

となる。つまり、一様流を角度  $\alpha$  だけ回転させるときには、

$$z \rightarrow ze^{-i\alpha} \quad (2.21)$$

とすればよい。

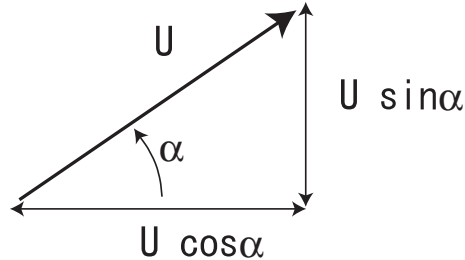


図 2.2: 一様流が迎角  $\alpha$  を持つ場合

(参考) 以下の関係式は、オイラーの公式と呼ばれる。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.22)$$

### 2.3 吹出し流れ

ここでは泉のように一点から放射状に（等方的に）吹き出す流れ (source flow) について調べる。この流れの複素速度ポテンシャル  $W$  は

$$W = \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (2.23)$$

となる。この式の  $z$  を極座標  $(r, \theta)$  :

$$z = re^{i\theta} \quad (2.24)$$

で表すと、流れ関数  $\psi$  および速度ポテンシャル  $\phi$  が求められる。

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{m}{2\pi} \theta \quad (2.25)$$

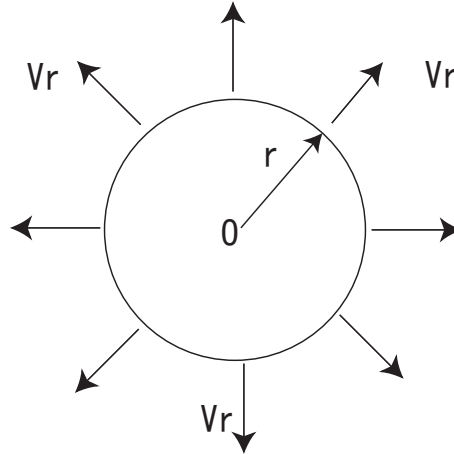


図 2.3: 吹出し流れ

この流れの速度の半径 ( $r$ ) 方向成分  $v_r$  および周 ( $\theta$ ) 方向成分  $v_\theta$  は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (2.26)$$

となる。つまり、半径方向の速度成分だけを持ち、その値は、 $r = \text{一定}$ の上では同じになる。流線は  $\psi = \text{一定}$ の線であるから、式 (2.25) より、 $\theta = \text{一定}$ の線が流線となる。(  $\psi = \text{const}$ の流線と  $\phi = \text{const}$ の等ポテンシャル線は直交することに注意。)

(参考) 極座標  $(r, \theta)$  では連続の式および、流れ関数は以下のようになる。

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow r v_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.27)$$

吹出し量は

$$\int_0^{2\pi} v_r r d\theta = v_r \times 2\pi r = \frac{m}{2\pi r} \times 2\pi r = m \quad (2.28)$$

となる。つまり、式 (2.23) の  $m$  は、噴出し量を表すことになる。ちなみに、 $m$  が負の場合は、吸い込み (sink) と呼ばれ、中心に向かって等方的に流れ、中心に吸い込まれる。

## 2.4 吹出しと一様流との重ね合わせ

ポテンシャル流の特徴は、その線形性のために解の重ね合わせ (superimpose ; いくつかの解を足し合わせても元の方程式の解になっている) ができることである ( $\phi$  や  $\psi$  の支配方程式であるラプラ

ス方程式は線形)。その結果、種々の流れを作り出すことができる。ここでは、一様流と吹出し、あるいは、一様流と吸い込みの重ね合わせについて述べる。一様流と吹出し ( $m > 0$ ) あるいは吸い込み ( $m < 0$ ) を重ね合わせると、式 (2.16) と式 (2.23) より、複素速度ポテンシャルは

$$W = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (2.29)$$

となる。

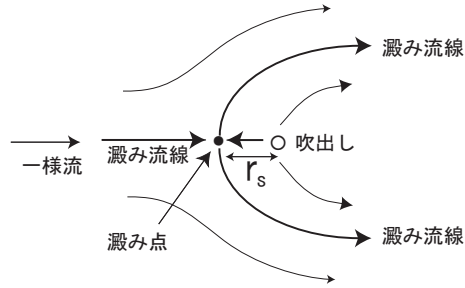


図 2.4: 吹出しと一様流の重ね合わせ

速度は

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (2.30)$$

となる。  $z = re^{i\theta}$  を用いて極座標で表すと

$$u = U + \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad v = \frac{m}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (2.31)$$

となる。したがって、速度が 0 となる澱み点では、  $u = v = 0$  より

$$\theta = \pi \text{ のとき } r_s = \frac{m}{2\pi U} \quad (2.32)$$

となる。つまり、吹出しと一様流が重なった場合には、吹出しの位置が原点で、

$$(x, y) = \left( -\frac{m}{2\pi U}, 0 \right) \quad (2.33)$$

が澱み点 (速度が 0) の位置となる。ちなみに、この場合、0 流線は閉じない。

同様なことが、一様流と吸い込みの場合にも起こり、その場合には、澱み点の位置は、吸い込みの下流側に来る。

$$(x, y) = \left( 0, -\frac{m}{2\pi U} \right) \quad (2.34)$$

(演習) 一様流 + 吹き出しの場合と一様流 + 吸い込みの場合の流線を描きなさい。

## 2.5 吹出しと吸込みの組み合わせ

$x = -a$  に吹出し量  $m$  の吹き出しが、  $x = a$  に吸込み量  $m$  の吸込みがあるとき、それらが作り出す流れは、それぞれの複素速度ポテンシャルを加えることにより計算できる。

$$W = W_{source} + W_{sink} = \frac{m}{2\pi} \ln(z + a) + \frac{-m}{2\pi} \ln(z - a) = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{z + a}{z - a} \quad (2.35)$$

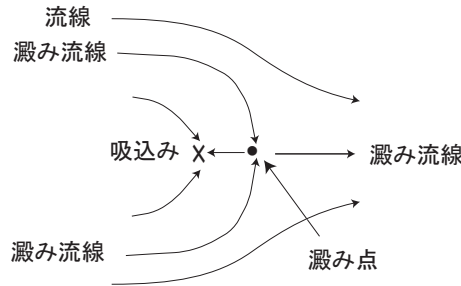


図 2.5: 吸い込みと一様流の重ね合わせ

ここで、 $m$  は正とする。吹き出し量と吸込み量が同じなので、吹き出しから出た流れは、すべて、吸い込みに吸収される。また、澱み流線（0 流線）は閉じた形になる。

(演習) 吹き出し + 吸い込みの場合の流線を描きなさい。

(演習) 一様流 + 吹き出し + 吸い込みの場合の流線を描きなさい。

## 2.6 2重吹出し

上述した吹き出しと吸込みの置かれている位置の間隔を限りなく 0 に近づけることを考える（具体的には、 $a \rightarrow 0$  にする）。この操作を行うために、式 (2.35) を変形する。

$$W = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{m}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{2a}{z-a} \right) \quad (2.36)$$

$a$  が小さいので  $2a/(z-a) \ll 1$  として、自然対数の関数をテーラー展開 (Taylor expansion) すると

$$W = \frac{m}{2\pi} \frac{2a}{z-a} \quad (2.37)$$

となる。このままでは、 $a \rightarrow 0$  にすると、0 になってしまうので、ここでは、間隔  $a$  を小さくすると同時に、吹き出し量 (吸込み量) を無限大にして、それらを掛け合わせたものが一定値になるようにする。

$$a(0) \times m(\infty) \rightarrow \mu \quad (2.38)$$

かつ、 $a \rightarrow 0$  とすると、式 (2.37) は

$$W = \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{z} \quad (2.39)$$

となる。これが作り出す流れを二重吹出し (doublet) の流れと呼ぶ (二重湧き出しとも言われる)。そして、 $\mu$  は 2重吹出しの強さを表す。

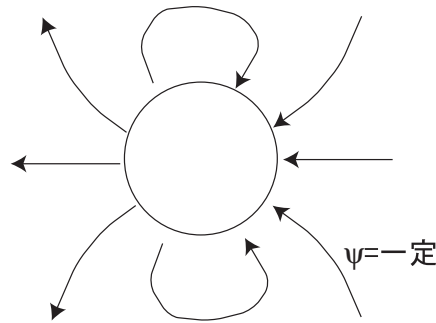


図 2.6: 2重吹き出しが作り出す流れの流線

(参考) 式 (2.36) を以下のようにも変形して、式 (2.39) を求めることもできる。

$$W = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{m}{2\pi} \times \frac{\ln(z+a) - \ln(z-a)}{2a} \times 2a \quad (2.40)$$

この式で、 $a \rightarrow 0$  を行くと、差分が微分になるので、

$$W = \frac{2am}{2\pi} \left( \frac{d}{db} \ln(z+b) \right)_{b=0} = \frac{2\mu}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{z} \quad (2.41)$$

となる。(了)

式 (2.39) を極座標表示すると

$$W = \frac{\mu}{\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad (2.42)$$

となり、速度ポテンシャル  $\phi$  および流れ関数  $\psi$  は

$$\phi = \frac{\mu}{\pi r} \cos \theta, \quad \psi = -\frac{\mu}{\pi r} \sin \theta \quad (2.43)$$

となる。

ちなみに、2重吹き出しは軸(向き)を持っており、上述のものは  $x$  軸の負の方向に軸が向いている。つまり、 $x$  軸の正の方向から流れが入ってきて、 $x$  軸の負の方向に流れを吹き出す。この軸を任意の方向に向けるには、具体的には、反時計方向 (counterclockwise) に角度  $\alpha$  だけ回転させる場合には、その複素速度ポテンシャル  $W$  は

$$W = \frac{\mu}{\pi} \frac{1}{ze^{-i\alpha}} \quad (2.44)$$

となる。もし、 $y$  軸の正の方向に2重吹き出しの軸を向ける場合には、 $\alpha = -\pi/2$  とすれば良い。

(演習) 2重吹き出しが作り出す流れの流線を描きなさい。

## 2.7 渦

渦 (vortex) とは、回転している流れである。この流れを表す複素速度ポテンシャルは

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (2.45)$$

である。吹き出し流れとの違いは、虚数単位  $i$  が付いている事である。

これを極座標  $(r, \theta)$  表示で表すと

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln r \quad (2.46)$$

となる。従って、速度ポテンシャルおよび流れ関数は

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \quad (2.47)$$

となる。これを見ると、式 (2.25) の吹き出しの場合との違いは、関数の  $\theta$  と  $\ln r$  が入れ替わっていることである。これは、式 (2.45) で虚数単位  $i$  を付けたことによる。

流線は、 $\psi = \text{const}$  より得られるので、この流れは  $r = \text{const}$  の円となる。つまり、この流れは原点を中心とする円運動をする。

この流れの速度  $(v_r, v_\theta)$  は

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (2.48)$$

となる。つまり、半径方向には速度成分はなく、周方向成分のみを持つ。また、その周方向成分も角度  $\theta$  には依存しない。速度の絶対値は等方的である。

また、循環を計算すると

$$\int v_\theta ds = \frac{\Gamma}{2\pi r} \times 2\pi r = \Gamma \quad (2.49)$$

となり、この  $\Gamma$  はまさに循環 (circulation) そのものである。また、この循環  $\Gamma$  の値が渦の強さを表している。つまり、 $\Gamma$  の値が大きい渦ほど強い渦である。

(参考) 極座標 (polar coordinates) での連続の方程式は

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta = 0 \quad (2.50)$$

となり、この式を恒等的に満たす流れ関数  $\psi$  の定義は

$$rv_r = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (2.51)$$

である。一方、渦度 0 の方程式 (あるいは渦無しの式) は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} = 0 \quad (2.52)$$

であり、この方程式を恒等的に満たす速度ポテンシャル  $\phi$  の定義は

$$rv_\theta = \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad (2.53)$$

である。(了)

(問題) 吸い込みと渦を同時に作用させた場合の流線を描きなさい。

## 2.8 角(かど)を回る流れ

ここでは角(かど、corner)を回る流れを考える。角を回る流れは基本形状の流れとしても、航空機への応用流れでも大変重要である。

その複素速度ポテンシャルは

$$W = Cz^n \quad (2.54)$$

で与えられる。これに  $z = re^{i\theta}$  を代入し、 $W = \phi + i\psi$  の関係を用いると、速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  が求められる。

$$\phi = Cr^n \cos n\theta, \quad \psi = Cr^n \sin n\theta \quad (2.55)$$

ここで、流線、つまり、 $\psi = \text{一定}$  の線を考える。簡単のために、 $\psi = 0$  の流線を考える。その結果、上式より

$$\sin n\theta = 0 \quad (2.56)$$

となる。つまり、

$$n\theta = 0, \quad n\theta = \pi \quad (2.57)$$

である。従って、角(かど)の角度  $\theta_c$  は、

$$\theta_c = \pi/n \quad (2.58)$$

である。 $n$  の値によって、いろいろな角度の角(かど)ができる。このとき、 $\theta_c$  は、流体側の角度を表している。この角は、大きく分けて、以下の2つに分類できる。

- $n > 1$  の場合：  $0 < \theta_c < \pi$
- $n < 1$  の場合：  $\pi < \theta_c$

このときの流れの速度成分は

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -Cnr^{n-1} \sin n\theta, \quad v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = Cnr^{n-1} \cos n\theta \quad (2.59)$$

である。

$\theta = 0$  の物体表面を考えると、この表面上の速度は  $v_r$  となる。角が原点 ( $z = 0$ ) になっているので、この式から、 $r \rightarrow 0$  にすれば、角のところで速度が得られる。この結果は、以下の2種類に分類される。

- $n > 1$  のとき、 $v_r \rightarrow 0$
- $n < 1$  のとき、 $v_r \rightarrow \infty$

つまり、凹んだ物体の角では、速度は0となり、凸物体の角では、速度は無限大となる。これは、飛行機の流れにおいて良く使われる大事な性質である。

(参考)

ちなみに、この角(かど)を回る流れから、楔(wedge)に衝突する流れを求めることが出来る。図 2.7



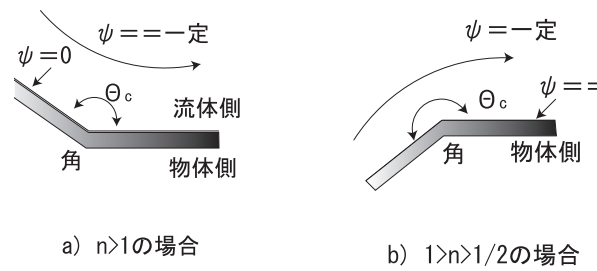


図 2.7: 角 (かど) を回る流れ

の a) において、楔の半頂角 (half-angle) を  $\delta$  とすれば、 $\delta = \pi - \theta_c$  となる。(図では、斜め前方から流れが来るようになるが、回転させて考えれば良い)  $\delta = \pi/2$  つまり  $\theta_c = \pi/2$  のときには、平板に垂直にあたる流れ (激点付近の流れ) になる。飛行機の翼周りの流れにおいて、その前縁近くの激点付近の流れは、局所的に見れば、平板に垂直に当る流れと考えてよい。

楔の角度  $\delta$  をいろいろ変えれば、楔の頂点から楔の表面に沿って流れる流れが得られ、かつその速度分布も出てくる。当然、頂点から加速する流れとなる。

(参考終わり)



## 第3章 円柱周りの流れ

ここでは、少し複素関数 (complex function) から離れて、つまり、複素関数から直接導くのではなく、ポテンシャル方程式を直接解くことにより、円柱周りの流れを誘導する。結果的には、この流れが複素関数で表されることを示す。円柱周りのポテンシャル流れは、今後、円柱を変換して任意の翼型周りの流れを解くときに必要となる。つまり、物体周りの2次元ポテンシャル流の基礎となる。

### 3.1 基礎方程式

ポテンシャル流 (potential flow) を考える。ちなみに、ポテンシャル流とは渦度の存在しない場所での流れである。ポテンシャル流はラプラス方程式を解くことにより得られる。極座標  $(r, \theta)$  で表したラプラスの方程式は

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.1)$$

となる。

前述したように、極座標での速度成分は、ポテンシャル  $\phi$  を微分して以下のように表される。

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.2)$$

式 (3.1) のラプラス方程式を変数分離法 (separation of variables) で解く。

$$\phi = R(r)\Theta(\theta) \quad (3.3)$$

これを式 (3.1) に代入すると

$$\Theta \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\Theta}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \quad (3.4)$$

となる。これを变形すると

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = n^2 \quad (3.5)$$

となる。この第一番目の式と第二番目の式は、それぞれ  $r$  と  $\theta$  に関する式である。これらが等しくなるためには、それらは一定値を取らなければならない。従って、その値をここでは  $n^2$  と置く。特に、 $n$  は  $n \geq 0$  の整数としてかまわない。このように置けるのは、 $\theta$  方向に一周回ったとき、つまり、 $2\pi$  だけ回転したとき、元の値と同じになる必要があるからである。

まず、 $\theta$  に関する式について考える。つまり、

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -n^2 \Theta \quad (3.6)$$

である。これを解くと

$$\Theta = a_1 \sin n\theta + b_1 \cos n\theta \quad (3.7)$$

となる。ここで、 $a_1$  と  $b_1$  は定数である。前述したように、解は周方向に ( $\theta$  方向に) 一周したら元と同じ値を取る必要がある。具体的に言えば、式 (3.7) において、 $\theta$  を  $\theta + 2\pi$  に置き換えても、同じ値を取るためには、 $n$  は整数でなければならない。

これを式 (3.3) に代入すると、

$$\phi = T(r) \cos n\theta + S(r) \sin n\theta \quad (3.8)$$

となる。

$T(r)$  および  $S(r)$  は式 (3.5) を満たす。つまり、

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} - n^2 = 0 \quad (3.9)$$

あるいは

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R = 0 \quad (3.10)$$

この式の解は、

$$R = r^m \quad (3.11)$$

とにおいて、式 (3.9) に代入すれば得られる。

$$m^2 = n^2 \quad \rightarrow \quad m = \pm n \quad (3.12)$$

したがって、

$$R = r^n \quad \text{or} \quad R = r^{-n} \quad (3.13)$$

となる。

結局、式 (3.8) の  $T(r)$  および  $S(r)$  は

$$T = A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad S = C_n r^n + D_n r^{-n} \quad (3.14)$$

の形をとる。この式から、 $n \geq 0$  の場合だけ考えれば良いことが確認できる。

以上より、 $\phi$  は、式 (3.8) より

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \} \quad (3.15)$$

となる。ちなみに、この式で、 $n = 0$  の場合は、 $\phi$  が一定値となる。式 (3.2) から分かるように、求めたい速度は、ポテンシャルを微分して得られる。したがって、一定値のポテンシャルは実質的に意味がないので、 $n = 0$  の場合は考慮する必要がない。つまり、 $n \geq 1$  である。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \} \quad (3.16)$$

### 3.2 境界条件

この方程式を解くためには、円柱周りの流れであるという境界条件が必要となる。円柱面に接している流体は、次の瞬間、円柱から剥がれないで、円柱面のどこかに存在する。言い換えると、

円柱が  $U$  の速度で動いているとき、円柱面に垂直な流れの速度が、円柱面自身のその方向の速度成分に等しくなる。

ちなみに、この条件が満たされない場合には、物体表面と流れ場との間に流れが存在しない隙間が出来てしまうか、あるいは、流れが物体の中に入り込んでしまう現象が起こる。

この条件を式で書くと

$$(v_n)_{r=a} = (v_r)_{r=a} = -U \cos \theta \quad (3.17)$$

となる。ここで、 $v_n$  は境界に垂直方向の成分である。また、円柱に沿う方向の速度成分  $v_\theta$  は、解いた結果として得られるということに注意する必要がある。

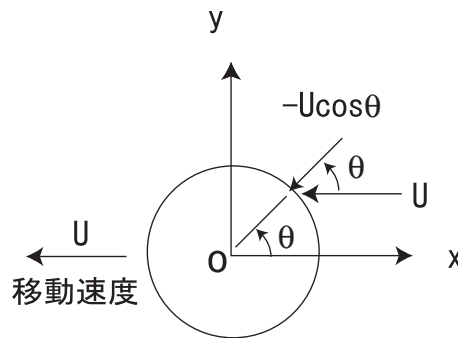


図 3.1: 円柱が動いている場合の円柱表面での境界条件

また、流れを決定するためには、もうひとつの条件が必要である。それは、無限遠方では、誘起される速度は 0 となることである。つまり、静止状態 (stationary state) である。これは、無限遠方にいる人には円柱が動いているかどうか感知できないことを意味する。

以上の 2 つの条件をまとめて式で表すと、

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r=a} = -U \cos \theta, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.18)$$

となる。

### 3.3 境界条件の適用

上述した境界条件を、先に誘導した一般解 (3.16) に適用する。半径方向の速度は

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n n r^{n-1} - B_n n r^{-n-1}) \cos n\theta + (C_n n r^{n-1} - D_n n r^{-n-1}) \sin n\theta \quad (3.19)$$

となる。

無限遠方での境界条件、つまり、 $r \rightarrow \infty$  で  $\partial\phi/\partial r \rightarrow 0$  より、 $n \geq 1$  の場合には、 $r^{n-1}$  が 0 に近づかない。したがって、式 (3.16) における  $r^n$  の項は不適切である。つまり、

$$A_n = 0, \quad C_n = 0 \quad (3.20)$$

となる。

その結果、式 (3.16) は

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (B_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \quad (3.21)$$

と簡単化される。

次に、円柱表面での境界条件を適用する。式 (3.21) を  $r$  で微分して、境界条件式 (3.18) を適用すると

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial r} \right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n-1} n (B_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) = -U \cos \theta \quad (3.22)$$

となる。ここで、2 番目と 3 番目の式を比較し、両方の式が恒等的に等しくなるためには

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad B_1 = Ua^2 \quad (3.23)$$

$$n \geq 1 \quad \rightarrow \quad D_n = 0 \quad (3.24)$$

$$n \geq 2 \quad \rightarrow \quad B_n = 0 \quad (3.25)$$

となる必要がある。

以上まとめると、速度ポテンシャル  $\phi$  は、式 (3.21) より

$$\phi = Ua^2 \frac{\cos \theta}{r} \quad (3.26)$$

となる。これが円柱周りの流れを記述する速度ポテンシャルである。

極座標表示においては、次の Cauchy-Riemann の関係が成立する。

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (3.27)$$

(問題)： 式 (2.4) と同じ考え方で、式 (3.27) を誘導しなさい。

この関係を使うと、流れ関数  $\psi$  は

$$\psi = -Ua^2 \frac{\sin \theta}{r} \quad (3.28)$$

となる。

従って、これらをまとめると、複素速度ポテンシャル  $W$  は

$$W = \phi + i\psi = Ua^2 \frac{\cos \theta}{r} - iUa^2 \frac{\sin \theta}{r} = \frac{Ua^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{Ua^2}{re^{i\theta}} = \frac{Ua^2}{z} \quad (3.29)$$

となる。

これはまさに 2 重吹出し (doublet) が作り出す流れそのものである (式 (2.39) 参照)。つまり、円柱が一定速度  $U$  で運動する場合、その周りに作り出される流れは、円柱の外に立ってその流れを眺

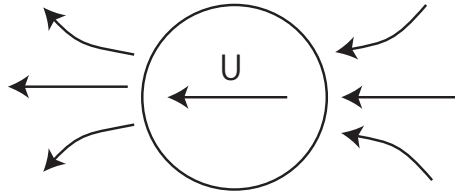


図 3.2: 物体の運動により誘起される周りの流れ

めると、2重吹出し（2重吹き出しの軸は  $x$  軸の負の方向）が作り出す流れと同じになる。円柱の進む側の物体表面付近では、流れは進行方向に押しやられ、逆に、後ろ側では、円柱を追いかけるように流れる（図 (3.2) 参照）。秋や冬に落ち葉の広がった道路の上を自動車が走るときに、落ち葉が自動車と一緒にその後を追って行くのが観察されるのはまさにこの現象の現れである。

2重吹出しの作る複素速度ポテンシャルは、一般的には式 (2.39) より

$$W = \frac{\mu}{\pi z} \tag{3.30}$$

と書ける。したがって、式 (3.29) と式 (3.30) を比較すると

$$\frac{\mu}{\pi} = a^2 U \tag{3.31}$$

となる。つまり、円柱流れの場合、二重吹出しの強さは

$$\mu = \pi a^2 U \tag{3.32}$$

に相当する。

### 3.4 一様中に置かれた円柱周りの流れ

今までは、円柱が動くのを外から見ていた。ここでは、円柱に乗って周りの流れを見ることを考える。これは、風洞試験のように、円柱が静止していて、それに一様流が当たるのと同じ流れになる。

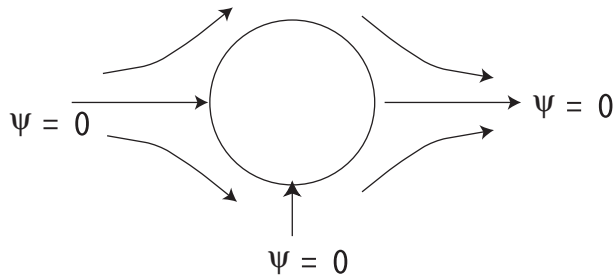


図 3.3: 一様流中にある円柱周りの流れの流線

複素速度ポテンシャル  $W$  を用いると、この流れは簡単に表すことができる。つまり、先ほど求めた、式 (3.29) に一様流の複素速度ポテンシャル ( $Uz$ ) を加えるだけでよい。

$$W = Uz + \frac{a^2 U}{z} \quad (3.33)$$

この式に、 $z = re^{i\theta}$  を代入して、 $W = \phi + i\psi$  を考慮すると、一様流中に置かれた円柱周りの流れに対する、 $\psi$  および  $\phi$  は

$$\phi = U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (3.34)$$

となる。

式 (3.34) を見ると、 $\psi = 0$  となる流線は、

$$r = a \quad \text{および} \quad \theta = 0, \pi \quad (3.35)$$

であることが分かる。

円柱表面での流れの速度は、円柱自体は動いていないので、円柱に接する方向の成分しか存在しない。

$$(v_\theta)_{r=a} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = -2U \sin \theta \quad (3.36)$$

ここで、注意することは最後の式においてマイナス符号がついていることである。この理由は、偏角 (argument)  $\theta$  を後縁からの角度として定義しているため (極座標ではこの取り方が普通)、 $\theta$  の増える方向と流れの速度の向きが逆になっているからである。

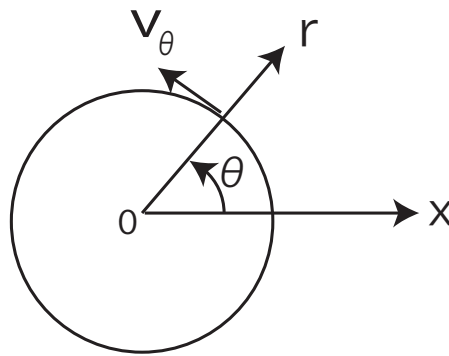


図 3.4: 偏角  $\theta$  の定義

この式から、 $\theta = \pi/2$  で、つまり、一様流に対して物体が一番張り出したところで、速度は一様流の速度の 2 倍になる。ちなみに、球の場合には、 $3/2$  倍である。3次元物体では周方向に流体エレメントが変形できるために、速度増加は少なくなる。

圧力係数  $c_p$  は、局所の圧力  $p$  と一様流の圧力  $p_\infty$  との差を動圧で無次元化し、ベルヌーイの関係式を使うと得られる。

$$c_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \left( \frac{v_\theta}{U} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (3.37)$$



となる。

この式から、澱み点の  $\theta = 0$  (後縁) および  $\theta = \pi$  (前縁) で、 $c_p = 1$  となり、 $\theta = \pi/2$  あるいは、 $\theta = 3\pi/2$  で、 $-3$  の負圧となる。この圧力分布を図 (3.5) に示す。この分布は、テキスト「粘性流体力学」の第 3 章 3.6.3 項の「円柱周りの剥離」においても参照されている。

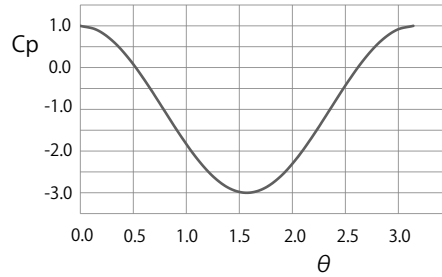


図 3.5: 一様流中の円柱周りの圧力分布

補足： 球まわりの流れ

球まわりの流れは、球座標  $(r, \theta, \phi)$  で書かれたラプラス方程式 (ポテンシャル流)

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3.38)$$

を満たし、ここで、微分演算子  $\Delta$  は、

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.39)$$

と表せる。速度ポテンシャル  $\Phi$  は

$$\Phi(r, \theta) = U \left( x + \frac{a^3}{2r^2} \cos \theta \right) \quad (3.40)$$

となる。ここで、 $x$  は、一様流  $U$  の吹く方向である。一様流を含む子午面を考えると

$$\Phi(r, \theta) = U \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) r \cos \theta \quad (3.41)$$

となる。この子午面  $(r, \theta)$  は、円柱周りの流れの場合 (第 3.1 図) と同じである。

速度成分は

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (3.42)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (3.43)$$

従って、球の表面での速度は

$$(v_\theta)_{r=a} = -\frac{3}{2} U \sin \theta \quad (3.44)$$

となる。この速度を使って、圧力係数は

$$c_p = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad (3.45)$$

となる。つまり、最小圧力は、 $C_p = -5/4$  である。円柱の場合の  $C_p = -3$  ほどは下らない。

(問題) 式 (1.78) を用いて、3次元の場合の2重吹き出しが作る速度ポテンシャルを誘導しなさい。(ヒント)  $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$  に吹き出しが、 $(a, 0, 0)$  に吸い込みがあるとした場合の速度ポテンシャルにおいて  $a \rightarrow 0$  にする。

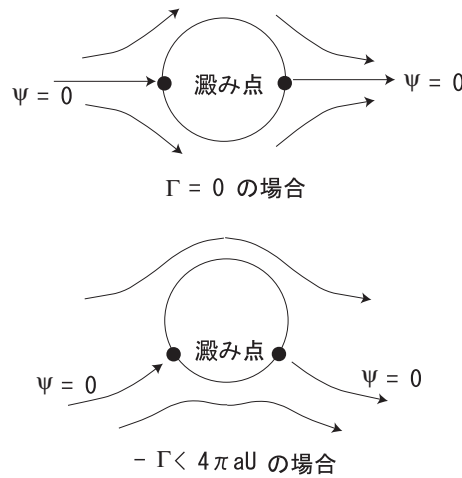


図 3.6: 円柱周りに循環が作用する場合 (循環が小さい場合)

### 3.5 円柱周りに循環がある場合

円柱周りの流れに循環 (circulation) を加えることは後々大変重要となる。それは翼周りの循環と対応している。円柱周りに循環を入れた場合の複素速度ポテンシャルは、今まで求めてきた複素速度ポテンシャルに渦に対する複素速度ポテンシャルを加えることにより得られる。

$$W(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a} \quad (3.46)$$

ここで、右辺の最後の項の自然対数の中に入っている  $a$  の意味は、円柱表面で流れ関数が 0 となるようにしたものである。式 (3.46) は大変重要な式である。以降の流れ解析の基礎となる式である。

この式に含まれている循環  $\Gamma$  の値を変えると、円柱周りの流れのパターンが変化する。具体的には、滞り点 (流れが滞りて速度が 0 となる所) の位置が変化する。

式 (3.46) から速度を求める。澱み点では円柱表面での速度が 0 となるから、この条件を課すると

$$\frac{(v_\theta)_{r=a}}{U} = -2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} = 0 \tag{3.47}$$

が得られる。したがって、このときの循環  $\Gamma$  は

$$\Gamma = 4\pi a U \sin \theta \tag{3.48}$$

となる。この  $\Gamma$  の値が実数 (real number) として存在するためには、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  の関係を利用して

$$0 \leq -\Gamma \leq 4\pi a U \quad (\Gamma < 0) \tag{3.49}$$

となる。ここでは、 $\Gamma$  が負の場合を考えている ( $\Gamma \leq 0$ ) (翼に発生する揚力の向きとの関係において)。つまり、時計方向の回転流を考える。これにより、結果的に、上向きの力が発生する。ちなみに、 $\Gamma > 0$  の場合は、流れ場が上下反対になり、下向きの力が発生する。

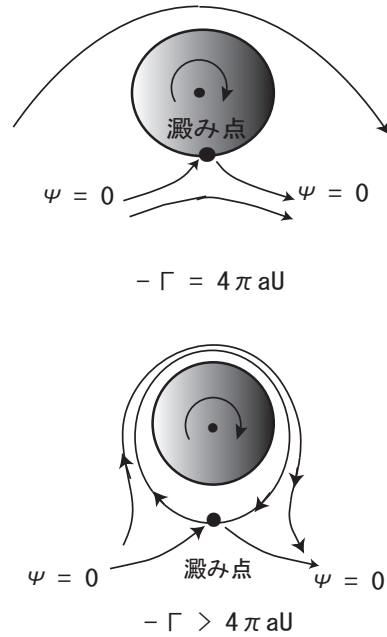


図 3.7: 円柱周りに循環が作用する場合 (循環が大きい場合)

つまり、この条件が満たされれば、物体表面上に澱み点が存在する事になる。ちなみに、 $\Gamma = -4\pi a U$  のとき、澱み点は一点となる ( $\theta = -\pi/2$ )。さらに  $\Gamma < -4\pi a U$  になると、澱み点は物体表面から離れて流れ場中に出て行く (第 3.7 図参照)。

澱み点の位置を求める別の方法として、式 (3.46) を  $z$  で微分して、それを 0 とおく。

$$\frac{dW}{dz} = U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = 0 \tag{3.50}$$

これを解くと

$$z = \frac{i\frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4U^2a^2}}{2U} \quad (3.51)$$

となる。これが渦み点を表す。平方根の中身が正であれば、物体表面上に2点の渦み点が存在することになり、上述のものに対応する。

### 3.6 マグナス効果

円柱周りに循環が生じると、速度分布も圧力分布も上下非対称になるので、円柱は主流に垂直方向の力を受ける。これをマグナス効果 (the Magnus effect) と呼ぶ。

この流れに対する速度ポテンシャル  $\phi$  は、式 (3.46) より、

$$\phi = U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (3.52)$$

となる。従って、 $\theta$  方向の速度成分は

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left\{ -U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \right\} \quad (3.53)$$

となる。円柱表面上での速度は、この式に  $r = a$  を代入して、

$$(v_\theta)_{r=a} = -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (3.54)$$

となる。

一方、圧力は、ベルヌーイの式より

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho (v_\theta)_{r=a}^2 = \frac{1}{2} \rho U^2 \left[ 1 - \left( -2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right] \quad (3.55)$$

あるいは、圧力係数  $C_p$  は

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho U^2} = 1 - \left( -2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \quad (3.56)$$

となる。

(問題) : この圧力係数の円柱表面に沿う分布を図にプロットしなさい。

ちなみに、揚力 (lift)  $L$  および抵抗 (drag)  $D$  は、後述するクッタ・ジューコフスキーの定理 (Kutta-Joukowski theorem; 式 (5.45)) より

$$L = -\rho U \Gamma, \quad D = 0 \quad (3.57)$$

となる。つまり、揚力は、循環  $\Gamma$  に比例することになる。その意味で、循環  $\Gamma$  は翼など揚力を発生する装置においては大変重要なパラメータである。つまり、翼の揚力を増大させるには、この循環を大きくすればよいということになる。

### 3.7 一様流が迎角を持つとき

前述したように、一様流が迎角  $\alpha$  を持つ場合には、複素速度ポテンシャル  $W$  に含まれる  $z$  を  $ze^{-i\alpha}$  に変えるだけでよい。ただし、渦に相当する最後の項の  $\ln z/a$  は、回転流を表すので、一様流の向きに何ら関係しない。従って、ここは変える必要がなく、そのままにしておけばよい。

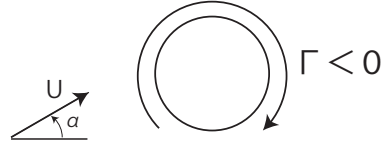


図 3.8: 一様流に迎角  $\alpha$  が付いた場合

以上のことから、一様流が迎角  $\alpha$  を持つ場合の複素速度ポテンシャルは、

$$W = U \left( ze^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a} \quad (3.58)$$

で表される。これが、これ以降の翼周りの流れの解析において大事な基礎式となる。

さらに、円の中心を平行移動したとき、具体的には、原点  $O$  から点  $z_0$  に中心を移動したとき、複素速度ポテンシャルは

$$W = U(z - z_0)e^{-i\alpha} + U \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z - z_0} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z - z_0}{a} \quad (3.59)$$

となる。実際には、この式が以降使われる。



## 第4章 等角写像

ここでは、写像関数を用いた等角写像 (conformal mapping) について勉強する。具体的には、形状を円から任意の形状に変換することを考える。

この変換を関数で表せば

$$z = f(\zeta) \quad (4.1)$$

となる。 $z$  平面および  $\zeta$  平面を

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (4.2)$$

と表せば、式 (4.1) は

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (4.3)$$

となる。

この変換の応用として、流体力学では、円柱周りの流れの解  $W(\zeta) = \phi + i\psi$  は前章で見えてきたように既知であるので、これを使って、別の物体、例えば翼型周りの流れを求めることができる。つまり、 $\zeta$  平面での円柱周りの流れが  $z$  平面での翼周りの流れに変換される。

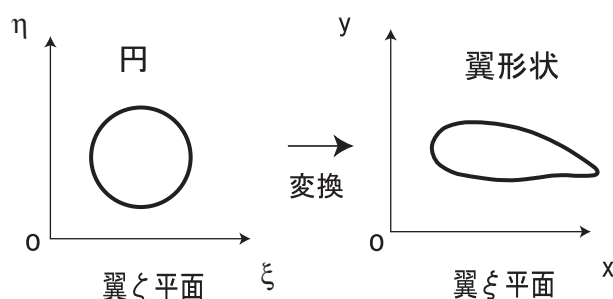


図 4.1: 円から翼型への形状変換

### 4.1 等角写像とは

等角写像とは、複素変数間の正則関数関係による変数変換である。 $f'(\zeta) \neq 0$  の場所で成立する。

$\zeta$  平面上にある曲線  $c_1$  を、

$$\zeta = \zeta_1(s) = \xi_1(s) + i\eta_1(s) \quad (4.4)$$

で表す。ここで、 $s$  は線に添うパラメータである (例えば、 $s$  は線に沿う長さ)。

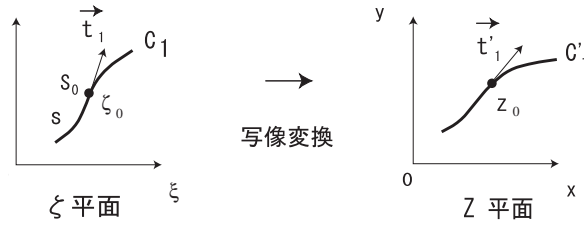


図 4.2: 等角写像について

これに対する接線ベクトルは

$$\vec{t}_1 = \left( \frac{d\xi_1(s)}{ds}, \frac{d\eta_1(s)}{ds} \right) \quad (4.5)$$

ここで、 $\vec{t}_1$  は曲線  $c_1$  に対する接線ベクトル、また、 $s$  は媒介変数である。 $s$  を長さと考えれば、

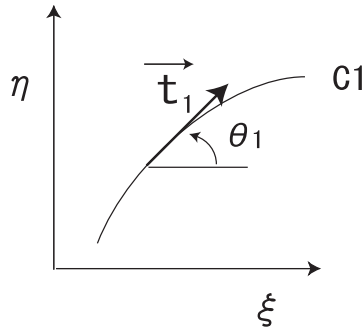
$$d\xi_1^2 + d\eta_1^2 = ds^2 \quad (4.6)$$

この条件を満たせば、 $\vec{t}_1$  は接線方向の単位ベクトルとなる。

つまり、複素平面内の表示では

$$\frac{d\xi_1(s)}{ds} + i \frac{d\eta_1(s)}{ds} = \cos \theta_1(s) + i \sin \theta_1(s) = e^{i\theta_1(s)} \quad (4.7)$$

と表される。ここで、 $\theta_1(s)$  は  $\zeta$  平面での  $\vec{t}_1$  の  $\xi$  軸からの偏角 (*argument*) である。

図 4.3: 単位ベクトルの偏角 (*argument*)

ここで、もうひとつの複素平面を考える。それは、変換された後の平面である。ここでは、これを  $z$  平面とする。

変換が

$$z = f(\zeta) \quad (4.8)$$

という関数  $f$  により、 $\zeta$  平面から  $z$  平面になされるとする。そのとき、変換後の  $z$  平面では、

$$z = z_1(s) = f(\zeta_1(s)) = x_1(s) + i y_1(s) \quad (4.9)$$



ここで、 $s$  はパラメータである。 $z$  平面上のこの曲線  $C'_1$  に沿う接線ベクトルは、 $\zeta$  平面の場合と同様にして

$$\frac{dz_1(s)}{ds} = \frac{dx_1(s)}{ds} + i \frac{dy_1(s)}{ds} \tag{4.10}$$

となる。

また、 $z = f(\zeta)$  という変換関係があるので、これを使うと

$$\frac{dz_1(s)}{ds} = \left( \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right)_{\zeta_1(s)} \cdot \frac{d\zeta_1}{ds} = f'(\zeta_1(s)) e^{i\theta_1(s)} \tag{4.11}$$

となる。

$z = z_0$  で、式 (4.11) の偏角 (argument) を考えると

$$\arg \left\{ \frac{dz_1(s)}{ds} \right\}_{z=z_0} = \arg \{f'(\zeta_0)\} + \theta_1(s_0) \tag{4.12}$$

となる。この式の解釈は、 $\zeta$  平面での接線は  $\theta_1$  という偏角を持っていたが、 $z$  平面に変換された後では、さらに、 $\arg \{f'(\zeta_0)\}$  だけ角度が回転するということである。

ここで、 $\zeta$  平面上の  $\zeta_0$  で交差するもうひとつの線  $C_2$  を考える。この線に対しても、 $C_1$  と全く同様な関係式が成り立つはずである。したがって、

$$\arg \left\{ \frac{dz_2(s)}{ds} \right\} = \arg \{f'(\zeta_0)\} + \theta_2(s_0) \tag{4.13}$$

となる。そこで、式 (4.13) から式 (4.12) を引くと、

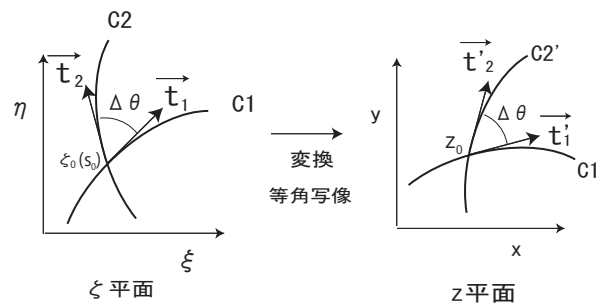


図 4.4: 変換後もなす角度は同じ (等角写像)

$$\arg \left\{ \frac{dz_2(s)}{ds} \right\} - \arg \left\{ \frac{dz_1(s)}{ds} \right\} = \theta_2(s_0) - \theta_1(s_0) \tag{4.14}$$

となる。この意味するところは

変換された  $z$  平面でのそれぞれの線 ( $C'_1$  および  $C'_2$ ) のなす角度は、変換前の  $\zeta$  平面でのそれぞれの線 ( $C_1$  および  $C_2$ ) のなす角度と等しい

ということである。これを等角写像と呼ぶ。

ちなみに、 $f'(\zeta_0) = 0$  では、偏角が定義できず、角度が不定となるので、式(4.14)は成立しない。つまり、等角写像は、 $f'(\zeta_0) \neq 0$  のときにのみ成立するということである（翼の後縁は通常尖っているため、そこでは成立しない）。

## 4.2 ジューコフスキー変換

円柱周りの流れ場を複素平面  $\zeta$  で表し、求めるべき翼型周りの流れ場を複素平面  $z$  で表すとした場合、一つの基本的な変換式は、

$$z = f(\zeta) = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (4.15)$$

である。ここで、 $a$  は円柱の半径である。この変換を、**ジューコフスキー変換** (Joukowski transformation) と呼ぶ。この式は、

$$\frac{z - 2a}{z + 2a} = \frac{(\zeta - a)^2}{(\zeta + a)^2} \quad (4.16)$$

と変形できる。

複素平面の成分をデカルト座標を使って、この変換を表す。

$$z = x + iy \quad (z \text{ 平面}), \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (\zeta \text{ 平面}) \quad (4.17)$$

これを式(4.15)に代入すると、各成分間の対応は

$$x = \xi + \frac{\xi a^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \eta - \frac{\eta a^2}{\xi^2 + \eta^2} \quad (4.18)$$

次に、 $\zeta$  平面を極座標  $(r, \theta)$  で表すと、

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta \quad (4.19)$$

となり、 $z$  平面（デカルト座標）と  $\zeta$  平面（極座標）における座標成分の変換は

$$x = \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right), \quad y = \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \quad (4.20)$$

となる。

(注意)

変換式(4.15)は、 $z = f(\zeta)$  とおけば、

$$f'(\zeta) = 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} = \frac{\zeta^2 - a^2}{\zeta^2} \quad (4.21)$$

従って、 $f'(\zeta) = 0$  になるところは、

$$\zeta = a, \quad \zeta = -a \quad (4.22)$$

である。つまり、この2つの点では、正則性がなくなり、等角写像が成立しないことになる。

(了)

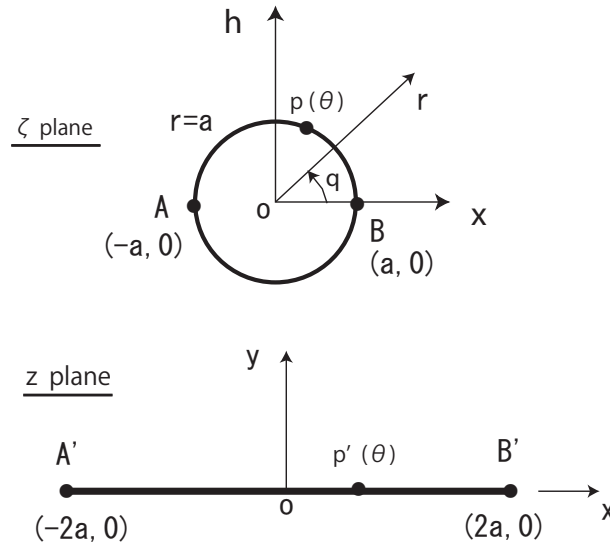


図 4.5: 平板への写像

### 4.2.1 平面板

ジューコフスキー変換 (Joukowski transformation) そのものは、実際には円を平板に変換する。翼型としては平板翼と見なしても良い。

$\zeta$  平面で半径  $a$  の円を考える。この円上の点は

$$\zeta = ae^{i\theta} \quad (4.23)$$

で表される。

これに対して、ジューコフスキー変換を施したとき、 $z$  平面上ではどのような形状になるか。式 (4.23) を式 (4.15) に代入すると、

$$z = 2a \cos \theta \quad (4.24)$$

となる。つまり、直径  $2a$  の円は幅が  $4a$  の平板に写像される。このとき、 $\zeta$  平面上にある円の上を  $0 \leq \theta \leq \pi$  で点  $P(\theta)$  が移動するとき、対応する  $z$  平面上の点  $P'$  は、平板の上面を  $B'$  から  $A'$  に向かって動く。一方、 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  で点  $P$  が円の上を移動するとき、 $z$  平面上の点は、平板の下面を  $A'$  から  $B'$  に向かって動く。

(注意) 点  $A'$  および点  $B'$  は特異点 (singular point) となり、等角写像が成り立たないことに注意すること。

### 4.2.2 円弧翼

つぎに、 $\zeta$  平面上で、円の中心を虚軸 (imaginary axis) の正の側にずらしてみる。つまり、円の中心を原点  $O$  から点  $M(0, f)$  に移動する。ただし、この円は、点  $A(-a, 0)$  および点  $B(a, 0)$  を通るも

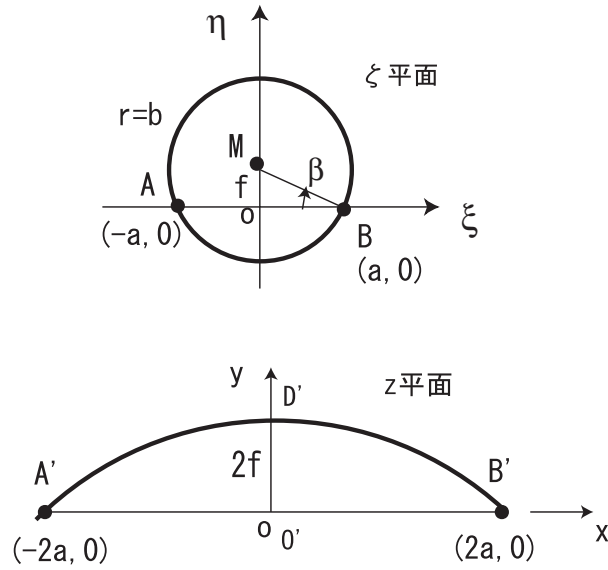


図 4.6: 円弧翼への変換 (上図:  $\zeta$  平面上、下図:  $z$  平面上)

のとする。従って、この円の半径  $b$  は  $a$  より大きくなって、

$$b = \sqrt{a^2 + f^2} = \frac{a}{\cos \beta} = a \sec \beta \quad (4.25)$$

となる。ただし、角度  $\beta$  は、点  $B$  から円の中心  $M$  までのベクトル  $\overrightarrow{BM}$  の、実軸 (real axis;  $\xi$  軸) の負の方向となす角度である。

$\zeta$  平面上で、円上にある点  $P$  を極座標表示を用いると、図 (4.7) より、

$$\frac{\zeta - a}{\zeta - (-a)} = \frac{\zeta - a}{\zeta + a} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (4.26)$$

と表わされる。円周角 (inscribed angle) の定理より、

$$\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi = \text{const} \quad (4.27)$$

となる。

また、式 (4.16) および式 (4.26) から、

$$\frac{z - 2a}{z + 2a} = \frac{(\zeta - a)^2}{(\zeta + a)^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 e^{i2\Delta\phi} \quad (4.28)$$

となる。

ちなみに、この変換式から分かるように、等角写像できない点は、以下のように変換される。

$$\zeta = a \rightarrow z = 2a, \quad \zeta = -a \rightarrow z = -2a \quad (4.29)$$

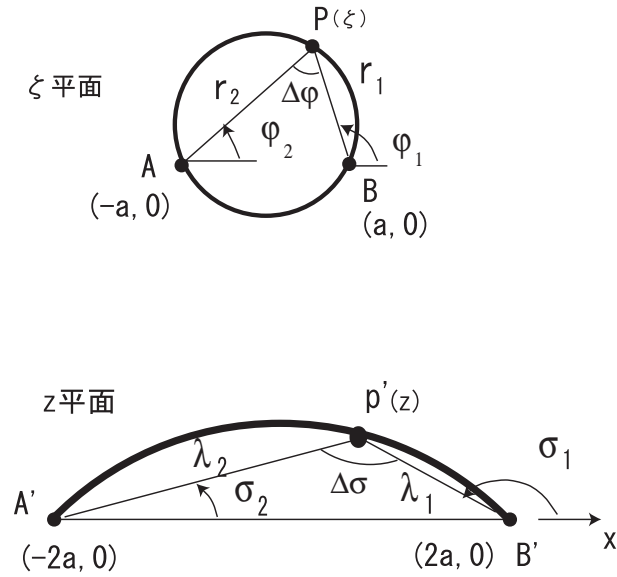


図 4.7: 円と円弧翼での長さや角度の関係

一方、図 (4.7) より、 $z$  平面での点  $P'$  は以下のように書ける。

$$\frac{z - 2a}{z + 2a} = \frac{\lambda_1 e^{i\sigma_1}}{\lambda_2 e^{i\sigma_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{i(\sigma_1 - \sigma_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{i\Delta\sigma} \tag{4.30}$$

ここで、 $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$  である。

式 (4.28) と式 (4.30) を比較すると

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2, \quad \Delta\sigma = 2\Delta\phi = \text{const} \tag{4.31}$$

以上より、円周角の定理より、円周上の点  $P$  に対応する点  $P'$  は、 $A'$  および  $B'$  を通る円弧 (circular arc) 上にあることが分かる。

ここで、 $\zeta$  平面上での円と  $z$  平面上での円弧を比較する。図 (4.6) より、円  $M$  の中心角 (central angle) は  $\angle AMB = 2\Delta\phi$  である。一方、相対する  $z$  平面での円弧上の中点を  $D'$  とすると、円弧上では  $\angle A'D'B' = 2\Delta\phi$  であるので、三角形  $MOB$  と三角形  $D'O'B'$  は相似の関係にある ( $\triangle MOB \equiv \triangle D'O'B'$ )。従って、

$$\frac{D'O'}{O'B'} = \frac{MO}{OB} \rightarrow D'O' = \frac{MO}{OB} \times O'B' = \frac{f}{a} \times 2a = 2f \tag{4.32}$$

となる。ここで、 $o'$  は  $z$  面上の原点である。

つまり、円弧翼 (circular arc) の最大高さは  $2f$  となる。翼型で考えれば、これは反り (camber) に相当し、キャンパーの尺度は反り比 (camber ratio)  $\gamma$  で定義される。

$$\gamma = \frac{2f}{4a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{a} = \frac{1}{2} \tan \beta \tag{4.33}$$

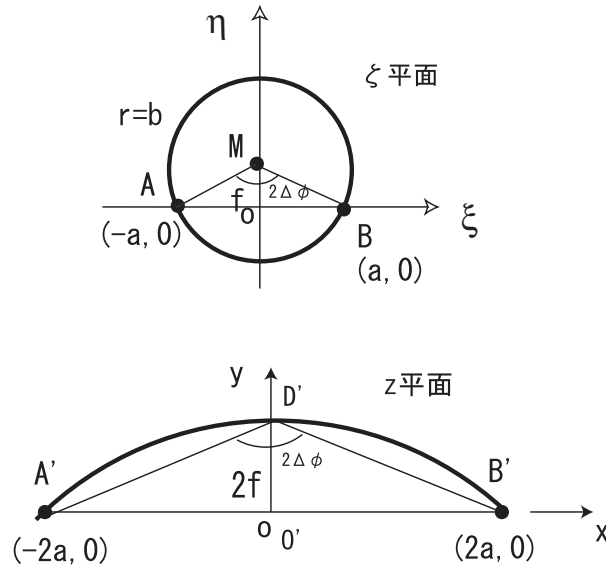


図 4.8: 三角形の相似

つまり、反り比を変えるのには、角度  $\beta$  を変えればよいことが分かる。ちなみに、この翼は、厚みが 0 であるので、厚み比 (thickness ratio) は 0 である。

### 4.2.3 対称翼

今度は  $\zeta$  平面の円の中心  $M$  を実軸上の負の方向に  $d$  だけずらしてみる。ただし、この円は点  $B(a, 0)$  を通るものとする。従って、円の半径  $c$  は

$$c = a + d \quad (4.34)$$

となる。ここで、円の中心をわずかにずらすと仮定する。

$$d = \epsilon a, \quad \epsilon \ll 1 \quad (4.35)$$

結局、円の半径  $c$  は

$$c = a + \epsilon a = (1 + \epsilon)a \quad (4.36)$$

と書ける。

一方、円上の点  $P$  は次のように表される。

$$\zeta = -\epsilon a + ce^{i\theta} \quad (4.37)$$

これに対応する翼上点は、ジューコフスキー変換を使って、

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} = (ce^{i\theta} - \epsilon a) + \frac{a^2}{ce^{i\theta} - \epsilon a} \quad (4.38)$$

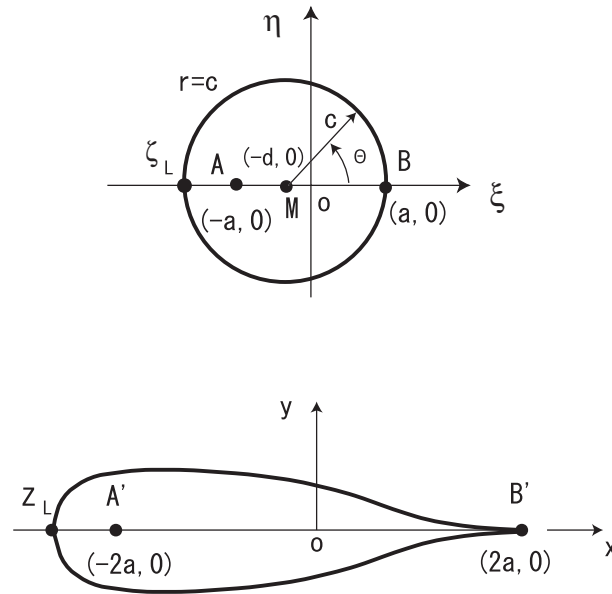


図 4.9: 円から対称翼への変換

この式の  $\theta$  を  $-\theta$  とすると、それは、左辺  $z$  の共役 (conjugate) である  $\bar{z}$  に等しくなっている。つまり、翼形状の実軸より下の部分 ( $\theta \leq 0$ ) は、上の部分 ( $\theta \geq 0$ ) を  $x$  軸に関して折り返したものになっている ( $z \rightarrow \bar{z}$ )。このことから、ここで得られる翼形状は、 $x$  軸に関して対称で、キャンバーのない対称翼 (symmetric airfoil) であることが分かる。

この翼の翼弦長 (chord length)  $l$  は

$$l = 2a + |z_L| \quad (4.39)$$

となる。ここで、 $z_L$  は

$$z_L = \zeta_L + \frac{a^2}{\zeta_L} = -a(1 + 2\epsilon) - \frac{a}{1 + 2\epsilon} \quad (4.40)$$

つまり、 $\zeta_L = -\epsilon a - (1 + \epsilon)a = -(1 + 2\epsilon)a$  である。

式 (4.40) を  $\epsilon$  が小さいとして展開すると

$$z_L \approx -2a(1 + 2\epsilon^2) \quad (4.41)$$

$z$  平面における対称翼の最大厚みは

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \quad (4.42)$$

の条件より計算できる。この解は、近似として  $\epsilon$  のオーダーまで考えたとき、 $\theta = 2\pi/3$  ( $\zeta$  平面) のところになる。また、 $z$  平面におけるその位置は、翼前縁から翼弦長の約  $1/4$  のところになる。

最大厚み  $t_{max}$  は、

$$t_{max} = 3\sqrt{3}a\epsilon \quad (4.43)$$

厚み比  $\tau$  に換算すると

$$\tau = \frac{t_{max}}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\epsilon \simeq 1.3\epsilon \quad (4.44)$$

つまり、 $\epsilon$  は、翼の厚みを表す尺度となる。

ちなみに、 $\theta = 0$  に相当する  $x = -2a\epsilon$  (ほぼ  $x = 0$ ) での翼の厚みは

$$t(x \simeq 0) \approx 4a\epsilon \quad (4.45)$$

となる。従って、 $t_{max}$  は、 $x \simeq 0$  での厚さの約3割増しである。

問題: 式 (4.43) の最大厚み  $t_{max}$  とその位置を誘導せよ。

問題:  $\epsilon$  を自分で与えて計算し、結果として得られる対称翼を図に描きなさい。

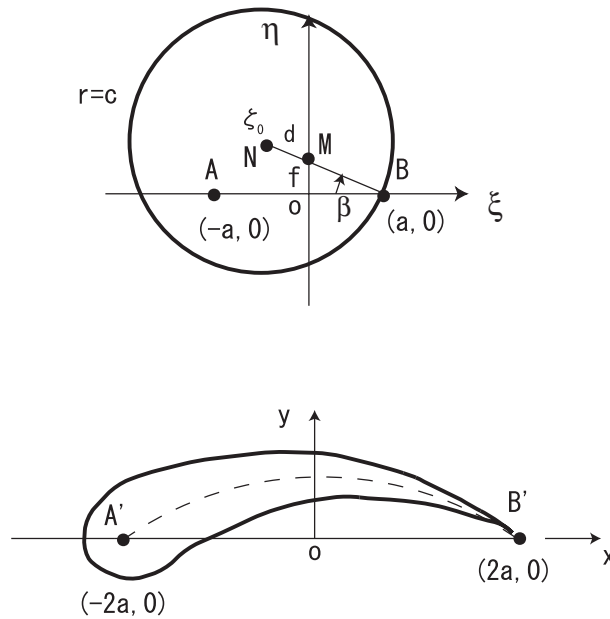


図 4.10: 円からジューコフスキー翼への変換

#### 4.2.4 ジューコフスキー翼

今までの変換から得られた翼を勘案して、円の中心を第2象限 (the second quadrant) に持っていく。このようにすれば、今まで述べた、虚軸の負の方向 (キャンバー) と実軸の負の方向 (厚み) の両方の性質を入れることができる。具体的には、 $BM$  の延長上に、円の中心  $N(\zeta = \zeta_0)$  を取る。

$$\overline{MN} = d \quad (4.46)$$

とする。点  $N$  を中心とする半径  $BN = c$  の円を描く。ここで、 $c$  は、

$$c = \sqrt{a^2 + f^2} + d = \frac{a}{\cos \beta} + d = a \sec \beta + d \quad (4.47)$$



である。円上の点  $P$  を極座標表示すれば

$$\zeta = \zeta_0 + ce^{i\theta} \quad (4.48)$$

となる。ここで、円の中心  $N$  の座標  $\zeta_0$  は

$$\zeta_0 = a - c\cos\beta + ic\sin\beta \quad (4.49)$$

である。

この円をジューコフスキー変換を用いて変換すると、ジューコフスキー翼が得られる。

$$z = \zeta_0 + ce^{i\theta} + \frac{a^2}{\zeta_0 + ce^{i\theta}} \quad (4.50)$$

この翼の反りは  $f$  の大きさ（あるいは  $\beta$  の大きさ）によって、また、厚みは  $d$  の大きさによって調節される。つまり、この翼を決定するのは、2つのパラメータ  $f$  と  $d$  である。

この翼の欠点は後縁角 (trailing edge angle) が 0 になることである。つまり、後縁で翼上面と翼下面が矢高曲線 (camber line; この場合には円弧) に接する。このときの後縁点を尖点 (cusp) と呼ぶ。後縁角が 0 となる後縁は実際には作ることができないので、非現実的である。

問題：  $d/a$  を自分で与えて、ジューコフスキー翼を図にプロットしなさい。

### 4.3 一般ジューコフスキー変換

後縁角 (trailing edge angle) が 0 になるジューコフスキー変換の欠点を直すには、以下に示す一般ジューコフスキー変換を利用すればよい。別名、カルマン・トレフツ変換 (Karman-Trefftz transformation) とも呼ぶ。

$$\frac{z - na}{z + na} = \left( \frac{\zeta - a}{\zeta + a} \right)^n \quad (4.51)$$

ちなみに、 $n = 2$  はジューコフスキー変換に相当する。また、 $\zeta \rightarrow -a$  のとき、 $z \rightarrow -na$  に相当する。

#### 4.3.1 円弧翼の場合

点  $A(-a, 0)$  および  $B(a, 0)$  を通る円を考え、点  $B$  から点  $A$  までの上側の円弧を  $C_u$ 、点  $A$  から点  $B$  までの下側の円弧を  $C_l$  とする。

この円の半径  $b$  は

$$b = \frac{a}{\cos\beta} \quad (4.52)$$

である。

ジューコフスキー変換のときと同様に、 $\zeta$  平面上での、点  $B$  および点  $A$  からの円周上の点  $P$  の座標の関係を考える。図 (4.11) より、

$$\zeta - a = r_1 e^{i\phi_1}, \quad \zeta - (-a) = \zeta + a = r_2 e^{i\phi_2} \quad (4.53)$$

となる。

この円を式(4.51)を使って変換された後の形状  $z$  を考える。点  $A'$  および点  $B'$  から測定する新しい座標  $(\lambda, \sigma)$  を考える。

$$z - na = \lambda_1 e^{i\sigma_1}, \quad z + na = \lambda_2 e^{i\sigma_2} \quad (4.54)$$

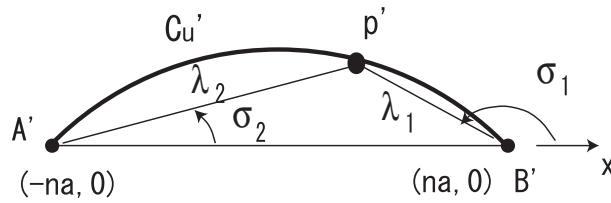
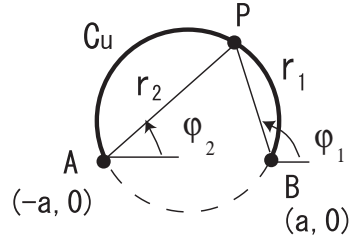


図 4.11: 一般ジューコフスキー変換による厚みのある2重円弧翼(上面)への変換

一般ジューコフスキー変換を用いると

$$\frac{\lambda_1 e^{i\sigma_1}}{\lambda_2 e^{i\sigma_2}} = \left( \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}} \right)^n \quad (4.55)$$

従って、

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^n, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = n\phi_1 - n\phi_2 = n(\phi_1 - \phi_2) \quad (4.56)$$

となる。点  $P$  は円周上を動くので、円周角一定の定理より

$$\phi_1 - \phi_2 = \text{const} \quad (4.57)$$

従って、式(4.56)より

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \text{const} \quad (4.58)$$

となる。従って、 $z$  平面上で点  $P'$  は  $A'$  および  $B'$  を通る円弧上にある。

同様に、下側の円周である  $C_l$  および  $C'_l$  について考える。図 4.12 より、円周角一定より、

$$(\phi_2 - \pi) - (\phi_1 - \pi) = \phi_2 - \phi_1 = \text{const} \quad (4.59)$$

ここでは、 $\phi_2$  および  $\phi_1$  の取り方に注意。従って、式(4.56)より

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \text{const} \quad (4.60)$$

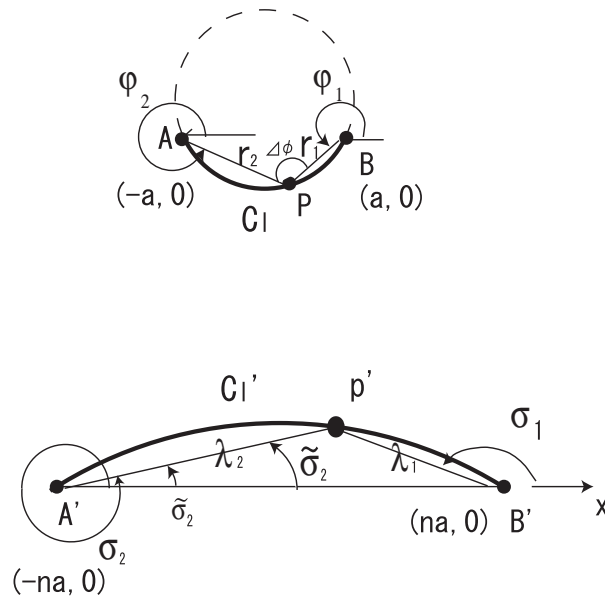


図 4.12: 一般ジュウコフスキー変換による厚みのある 2 重円弧翼 (下面) への変換

図から分かるように、 $\sigma_2$  は  $2\pi$  より大きいので、

$$\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 + 2\pi \tag{4.61}$$

とおけば、

$$\sigma_1 - (\tilde{\sigma}_2 + 2\pi) = const \tag{4.62}$$

より

$$\sigma_1 - \tilde{\sigma}_2 = const \tag{4.63}$$

となる。このことから、下面側の点  $P'$  も  $z$  平面上で円弧の上を動くことが分かる。ただし、上面の円弧と下面の円弧は異なってくる。この翼を 2 重円弧翼 (double circular arc airfoil) と呼ぶ。

### 4.3.2 後縁角

ここでは、一般ジュウコフスキー変換での後縁角を調べる。同一の円の中にある相対する円周角の和は  $\pi$  であるので

$$\Delta\phi_u + \Delta\phi_l = \pi \tag{4.64}$$

となる。

下面では、

$$\phi_2 - \phi_1 = (\phi_2 - \pi) - (\phi_1 - \pi) = \Delta\phi_l \tag{4.65}$$

より

$$\sigma_1 - \sigma_2 = n(\phi_1 - \phi_2) = -n \cdot \Delta\phi_l \tag{4.66}$$

従って、式(4.61)を使って、 $\sigma_2$  を  $\tilde{\sigma}$  で表せば

$$\sigma_1 - (\tilde{\sigma}_2 + 2\pi) = -n \cdot \Delta\phi_l \quad (4.67)$$

となる。

従って、

$$\sigma_1 - \tilde{\sigma}_2 = 2\pi - n \cdot \Delta\phi_l \quad (4.68)$$

一方、上面側の  $C_u$  では、

$$\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi_u \quad (4.69)$$

より、

$$\sigma_1 - \sigma_2 = n \cdot \Delta\phi_u \quad (4.70)$$

式(4.68)に式(4.64)を代入すると

$$\sigma_1 - \tilde{\sigma}_2 = 2\pi - n \cdot \Delta\phi_l = 2\pi - n \cdot (\pi - \Delta\phi_u) = 2\pi - n\pi + n \cdot \Delta\phi_u \quad (4.71)$$

式(4.71)と式(4.70)を比較すると、 $n = 2$ の時だけ両式は等しくなる。つまり、 $C'_u = C'_l$ である。つまり、円弧翼(厚み0)となる。 $n \neq 2$ であれば、厚みのある円弧翼である。

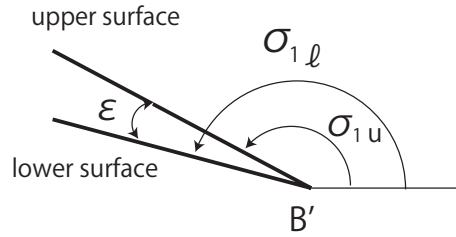


図 4.13: 一般ジューコフスキー変換による厚みのある円弧翼の後縁角

ここで、後縁角  $\epsilon$  を求める。上面側の円弧の端点  $B'$  での角度は、 $\sigma_2 \rightarrow 0$  とすれば

$$(\sigma_1)_u = n \cdot \Delta\phi_u \quad (4.72)$$

となり、下面側の円弧の端点  $B'$  での角度は、 $\tilde{\sigma}_2 \rightarrow 0$  とすることにより得られる。

$$(\sigma_1)_l = 2\pi - n \cdot \pi + n \cdot \Delta\phi_u \quad (4.73)$$

となる。従って、式(4.72)および式(4.73)より、後縁角  $\epsilon$  は

$$\epsilon = (\sigma_1)_l - (\sigma_1)_u = (2\pi - n \cdot \pi + n \cdot \Delta\phi_u) - n \cdot \Delta\phi_u = (2 - n)\pi \quad (4.74)$$

となる。 $n = 2$ のときは  $\epsilon = 0$ 、つまり、ジューコフスキー翼では、後縁角は0となる。

ちなみに、後縁角  $\epsilon$  に基づいて、一般ジューコフスキー変換の実数  $n$  を決めることが出来る。つまり、式(4.74)から、

$$n = \frac{2\pi - \epsilon}{\pi} \quad (4.75)$$

となる。これを使うと、一般ジュークフスキー変換は、式(4.51)から

$$\frac{z - \frac{2\pi - \epsilon}{\pi}a}{z + \frac{2\pi - \epsilon}{\pi}a} = \left( \frac{\zeta - a}{\zeta + a} \right)^{\frac{2\pi - \epsilon}{\pi}} \quad (4.76)$$

となる。この形の変換をカルマン・トレフツ変換 (Karman-Trefftz transformation) と呼ぶ。

[問題] 一般ジュークフスキー変換を使って、翼型を描いてみなさい。



## 第5章 ブラシウスの力およびモーメントの公式

今までは、物体およびその周りの流れについて見てきた。ここでは、流体が物体に及ぼす力 (force) やモーメント (moment) について勉強する。

### 5.1 力の公式

流体が物体に及ぼす力を  $(F_x, F_y)$  とする。逆の見方をすれば、物体から流体には、 $(-F_x, -F_y)$  の力が反作用 (reaction) として作用する。

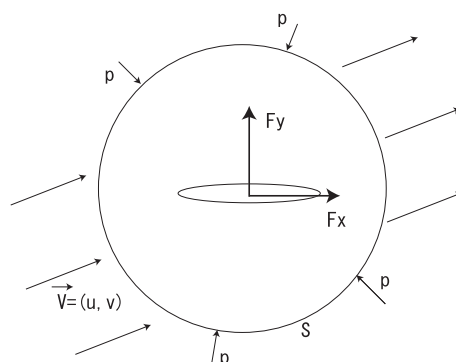


図 5.1: 物体に作用する力と検査体積

検査面 (control surface)  $S$  を考える。この面から出ていく各方向の運動量 (momentum) の総和は、その方向に働く力に等しい。これを式で表せば、

$x$  方向に関する力と運動量の関係より

$$\oint_S \rho u (u dy - v dx) = - \oint_S p dy - F_x \quad (5.1)$$

$y$  方向に関する力と運動量の関係より

$$\oint_S \rho v (u dy - v dx) = \oint_S p dx - F_y \quad (5.2)$$

となる。ここで、 $\rho(u dy - v dx)$  は境界から出ていく質量流量 (mass flow) である。つまり、質量に相当する。この質量が  $x$  方向の速度  $u$ 、あるいは、 $y$  方向の速度  $v$  を持って運動量として検査面内から外に出て行く。

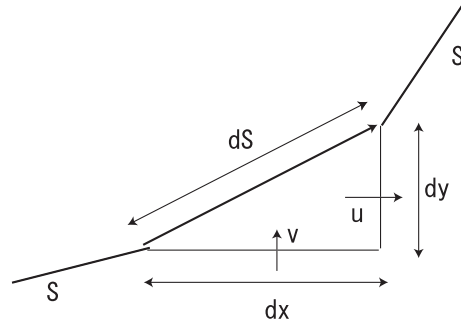


図 5.2: 検査体積境界での流出量の計算

式 (5.1) と式 (5.2) より、 $F_x$  および  $F_y$  は、

$$F_x = - \oint p dy - \oint \rho u (u dy - v dx) \quad (5.3)$$

$$F_y = \oint p dx - \oint \rho v (u dy - v dx) \quad (5.4)$$

となる。

今、ベルヌーイの式を考える。

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_0 \quad (5.5)$$

ここで、 $p$  は静圧 (static pressure)、 $V^2 = u^2 + v^2$ 、 $p_0$  は総圧 (total pressure) である。この関係式を式 (5.3) および (5.4) に代入すると、

$$F_x = \oint \frac{1}{2} \rho (-u^2 + v^2) dy + \oint \rho uv dx \quad (5.6)$$

$$F_y = - \oint \frac{1}{2} \rho (u^2 - v^2) dx - \oint \rho uv dy \quad (5.7)$$

となる。ここで、総圧は一定より、総圧の  $x$  に関する一周積分、および  $y$  に関する一周積分はゼロになる (ある点から離れても、もとに戻るの、プラス・マイナスの差し引きは0になる)。

$$\oint p_0 dx = 0, \quad \oint p_0 dy = 0 \quad (5.8)$$

これらの  $F_x$  と  $F_y$  をまとめて、複素数表示すると、

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \oint [(u^2 - v^2) - i2uv] dz \quad (5.9)$$

となる。

ここで、速度  $u, v$  を複素速度ポテンシャルで表すと

$$\frac{dW}{dz} = u - iv, \quad \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 = u^2 - v^2 - i2uv \quad (5.10)$$



この式を式 (5.9) に代入すると

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad (5.11)$$

が得られる。これをブラシウス (Blasius) の力の公式 (Blasius' formula of force) と呼ぶ。大変簡単な式で力を求めることが出来る。複素速度ポテンシャル  $W(z)$  が与えられれば、力が計算できることになる。

言い換えれば、翼を取り囲む任意の閉曲線  $\Gamma$  を考えたとき、この閉曲線に沿って  $(dW/dz)^2$  を積分して、それに  $i\rho/2$  を掛ければ、流体が翼に生じる力  $F$  の共役 (conjugate) である  $\bar{F}$  が計算できる。当然のことながら、この経路は翼表面に沿って取っても良い。

まとめると、共役な力  $\bar{F}$  は

$$\bar{F} = F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \oint \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad (5.12)$$

となる。また、力は流体の密度に比例することも分かる。水と空気では密度が 1000 倍違うので、速度が同じであれば、水の方が 1000 倍大きな力が発生する。

## 5.2 モーメントの公式

式 (5.3) および式 (5.4) は、 $x$  方向の力  $F_x$  および  $y$  方向の力  $F_y$  を表しているが、これは一周積分して求めている。積分経路の一部を考えると、それによる寄与が計算できる。

$$\delta F_x = -pdy - \rho u(udy - vdx) \quad (5.13)$$

$$\delta F_y = pdx - \rho v(udy - vdx) \quad (5.14)$$

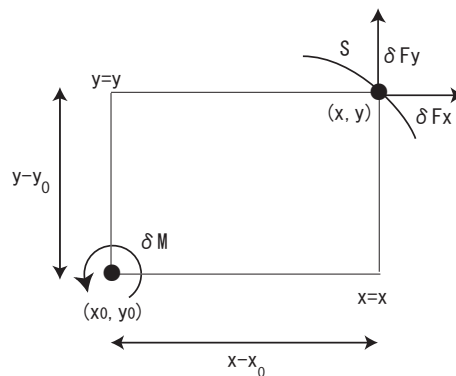


図 5.3: 境界に作用する力によるモーメント

これを使って、ピッチングモーメント (pitching moment) の寄与  $\delta M$  を計算する。点  $(x_0, y_0)$  まわりのピッチングモーメントを考える。頭下げ (pitch down) を正とすると

$$\delta M = (x - x_0)\delta F_y - (y - y_0)\delta F_x \quad (5.15)$$

となる。式 (5.13) および式 (5.14) をこの式に代入して、一周積分すると

$$M = \oint (x - x_0)[pdx - \rho v(udy - vdx)] - \oint (y - y_0)[-pdy - \rho u(udy - vdx)] \quad (5.16)$$

が得られる。

この式の中の圧力  $p$  にベルヌーイの関係式 (5.5) を代入すると

$$M = -\frac{1}{2}\rho \oint [(u^2 - v^2)\{(x - x_0)dx - (y - y_0)dy\} + 2uv\{(y - y_0)dx + (x - x_0)dy\}] \quad (5.17)$$

となる。

この式の中の速度成分  $u, v$  を複素速度ポテンシャル  $W$  で表すことを考える。Blasius の力の公式 (5.11) を参考にすると、モーメントを求めるのにはこれに腕の長さを掛ければ良いことが想像できる。そこで、

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 (z - z_0)dz \quad (5.18)$$

を計算してみる。ただし、 $z_0 = x_0 + iy_0$  である。これを書き下すと

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 (z - z_0)dz = (u - iv)^2 \{x - x_0 + i(y - y_0)\}(dx + idy) \quad (5.19)$$

となる。この式の実数部 (real part, 略号 Re) を取り出すと、

$$Re \left\{ \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 (z - z_0)dz \right\} = \{(u^2 - v^2)(x - x_0) + 2uv(y - y_0)\}dx - \{-2uv(x - x_0) + (u^2 - v^2)(y - y_0)\}dy \quad (5.20)$$

となる。

これはまさに式 (5.17) の積分の中身と同じである。よって、式 (5.17) は式 (5.18) を使って

$$M = -\frac{1}{2}\rho \times Re \left\{ \oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 (z - z_0)dz \right\} \quad (5.21)$$

これもピッチングモーメントを計算する上で大変便利な式である。ここで注意することは、この式では、頭上げを正にしていることである。

(参考1) モーメント式の別の誘導法

力 ( $F_x, F_y$ ) が点 ( $x, y$ ) に作用しているとき、原点回りのモーメントは以下ようになる。

$$M = xF_y - yF_x \quad (5.22)$$

ただし、頭下げを正とする。力の式で出てきた  $F_x - iF_y$  を含む形で、この式を得るには、

$$i(F_x - iF_y)(x + iy) = xF_y - yF_x + i(xF_x + yF_y) \quad (5.23)$$

を考えればよい。この式の実部がそれに相当する。つまり、

$$Re[i(F_x - iF_y)(x + iy)] = xF_y - yF_x \quad (5.24)$$

ここで、 $Re$  は実部を表す。この式からの類推として、モーメント  $M$  として以下の式が考えられる。つまり、 $F_x - iF_y$  のところに、前述の力に関する Blasius の式を用いれば、

$$M = Re \left[ i \times i \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 z dz \right] \quad (5.25)$$

係数部分を外に出すと

$$M = -\frac{\rho}{2} Re \left[ \oint_{\Gamma} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 z dz \right] \quad (5.26)$$

原点回りではなく、 $z_0$  回りのモーメントであれば

$$M = -\frac{\rho}{2} Re \left[ \oint_{\Gamma} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 (z - z_0) dz \right] \quad (5.27)$$

となる。

(参考2) モーメント式の別の誘導法(2)

より直接的には、モーメントの腕の長さ × 力を計算してみる。

$$\delta \tilde{M} = \{(x - x_0) + i(y - y_0)\} \times \{\delta F_x - i\delta F_y\} \quad (5.28)$$

この式を展開すると、

$$\delta \tilde{M} = (x - x_0)\delta F_x + (y - y_0)\delta F_y + i \{-(x - x_0)\delta F_y + (y - y_0)\delta F_x\} \quad (5.29)$$

となる。これを見ると、この虚部がまさに、式(5.15)に対応している。より厳密に言えば、モーメント  $\delta M$  は、

$$\delta M = -Im \{ \delta \tilde{M} \} = Re \{ i \times \delta \tilde{M} \} \quad (5.30)$$

である。この関係の基づいて、上述の力  $\delta F$  のところに、式(5.12)から得られる以下の式を代入すれば、モーメントの式が得られる。

$$\delta F_x - i\delta F_y = i \frac{\rho}{2} \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad (5.31)$$

### 5.3 クッタ・ジューコフスキーの定理

これは一様流中に置かれた物体周りに働く力(例えば空気力)を求める公式で、大変重要である。共役複素速度  $dW/dz$  を以下のように展開する。

$$\frac{dW}{dz} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \quad (5.32)$$

(参考) ローラン展開(Laurent expansion)とは、テーラー展開の特異性(singular)を含んだ場合への拡張(一般化)である。関数  $f(z)$  を点  $a$  のまわりに展開すると

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (5.33)$$

ここで、係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - 1)^{n+1}} d\zeta \quad (5.34)$$

(了)

式 (5.32) を見ると、無限遠方で、つまり、 $z \rightarrow \infty$  で、一定値  $a_0$  になることが分かる。それは、取りも直さず、一様流であるので、

$$a_0 = U_\infty e^{-i\alpha} \quad (5.35)$$

次に、物体を取り囲む任意の閉曲線  $\Gamma$  に沿う積分を実行する。

$$\oint_\Gamma \frac{dW}{dz} dz = \oint (u - iv)(dx + idy) = \oint (udx + vdy) + i \oint (udy - vdx) \quad (5.36)$$

この右辺第2項は、物体表面から検査面内に流体が噴出することがなければ、任意の経路で

$$\oint udy - vdx = \oint \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (5.37)$$

となる。ここで、 $\vec{V} = (u, v)$ 、また  $\vec{n}$  は経路に垂直方向の単位ベクトルである。これは、この閉じた経路に入ってきた流れは、必ず出て行くことを意味している (流量の保存)。出入りのトータルはゼロになる。当然の事ながら、この積分経路は、物体表面に沿う経路でも成立する。その時は、その経路のどの点でも流れの出入りはない。

以上のことより、左辺の積分値は、循環  $\Gamma$  の定義式そのものである。式 (5.36) および式 (5.37) より

$$\oint \frac{dW}{dz} dz = \oint (udx + vdy) = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \Gamma \quad (5.38)$$

(参考)

$$udy - vdx = \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \vec{V} \cdot (d\vec{s} \times \vec{k})$$

ここで、 $\vec{k}$  は、紙面に垂直方向 (手前方向) の単位ベクトルである。(了)

一方、複素積分の留数定理 (Residue Theorem) より、式 (5.32) を一周積分すると、

$$\oint \frac{dW}{dz} dz = 2\pi i a_1 \quad (5.39)$$

となる (ここで、 $a_1$  は関数  $dW/dz$  の  $z = 0$  における留数である)。

従って、係数  $a_1$  が以下のように決定される。

$$2\pi i a_1 = \Gamma \rightarrow a_1 = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (5.40)$$

次に、式 (5.32) に対して Blasius の力の公式を適用する。

$$F_x - iF_y = |F| e^{-i\beta} = i \frac{\rho}{2} \oint \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz$$

$$\begin{aligned}
&= i\frac{\rho}{2} \oint \left( a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz \\
&= 2\pi i(2a_0a_1) \\
&= -2\rho\pi U_\infty e^{-i\alpha} \left( -i\frac{\Gamma}{2\pi} \right)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

従って

$$F_x - iF_y = |F|e^{-i\beta} = -\rho U_\infty \Gamma e^{-i(\alpha+\pi/2)} \tag{5.42}$$

ここで通常は  $\Gamma < 0$  である。この式をクッタ・ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理と呼ぶ。Kutta(Germany) が 1902 年に、Joukovski (Russia) が 1906 年にそれぞれ別々に誘導した。

以上まとめると、作用する力の絶対値  $|F|$  と、その角度  $\beta$  は

$$|F| = -\rho U_\infty \Gamma, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{5.43}$$

となる。

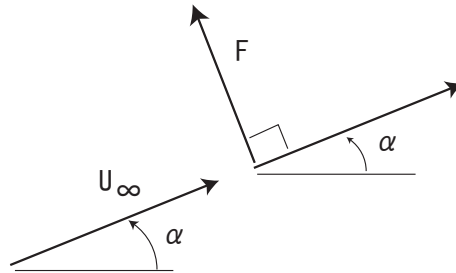


図 5.4: 翼に発生する力

つまり、物体に作用する力は、

$$|F| = -\rho U_\infty \Gamma \tag{5.44}$$

で、その方向は、一様流に直交する。つまり、この力は揚力に相当し、揚力  $L$  が発生することになる (揚力の定義は一様流に垂直な力)。その結果、抗力  $D$  は 0 となる (抗力の定義は一様流の方向の力)。つまり、

$$L = -\rho U_\infty \Gamma, \quad D = 0 \tag{5.45}$$

である。

(注意) 揚力 (lift) とは一様流に垂直方向の力であり、抗力 (drag) とは一様流に垂直方向の力である。

一様流の方向の力の成分は生じないこと、つまり、抗力が 0 であることは、現実の世界の話と異なる。これをダランベールの背理 (d'Alembert's paradox) と呼ぶ。

式 (5.32) の係数  $a_0, a_1$  にそれぞれ式 (5.35) と式 (5.40) を代入すると

$$\frac{dW}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \tag{5.46}$$

これを積分すると

$$W = U_\infty e^{-i\alpha} z - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \tag{5.47}$$

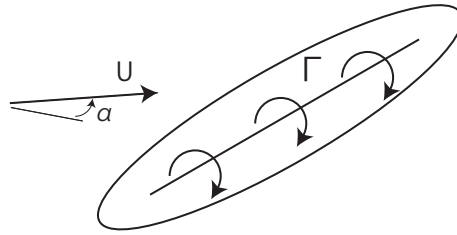


図 5.5: 翼を一本の渦で近似

この式の右辺第1項は一様流 (uniform flow) で、第2項は渦 (vortex) である。この式の解釈は、遠くから見ると、翼の影響は1本の渦で表すことができる、あるいは置き換えられるということである。この渦は翼に固定されているので、固定渦 (bound vortex) と呼ばれる。

## 第6章 平板に働く力

ここでは、具体的な物体形状、つまり、一番簡単な形状である平板について、その周りの流れおよび空気力を勉強する。

### 6.1 迎角が付いたときの循環の大きさ

迎角が付いた状態で、循環がない場合には、平板上に2つの滞り点（stagnation point）が現れる。具体的には、平板下面の前縁近くと、平板上面の後縁近くの2点である。この流れは、平板周りに循環がない場合である。

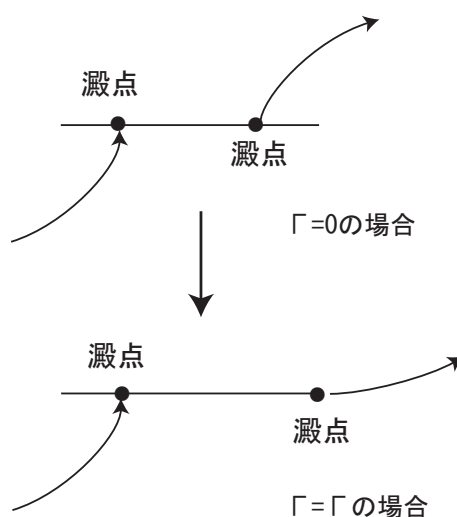


図 6.1: 後縁の特異性をなくすように流線が後縁に移動

実際の流れを考えると、上面に発生する滞り点は、後縁を周り込む流れが後縁で無限大の速度を持つためにそこで圧力が非常に小さくなり、また、後縁をまわった後、流れとしては逆圧力勾配（adverse pressure gradient）となるため剥離が発生することになる。このとき生じる渦（反時計方向）が下流方向に流されて、角運動量保存（conservation of angular momentum）の法則から、平板周りには、絶対値が同じで、方向が逆の循環が存在することになる。また、このとき流れは平板の後縁から平板に平行に下流側に出て行く。

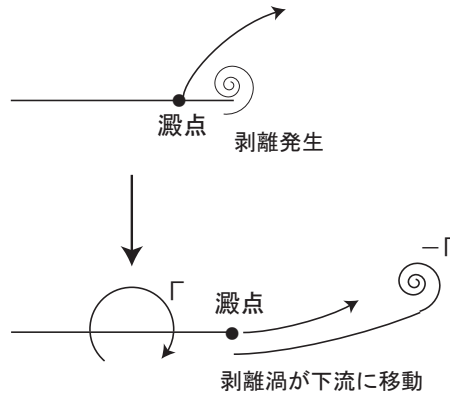


図 6.2: 剥離渦が発生し、下流に移動することにより、翼周りに循環が発生

平板上の流れが  $z$  平面に、円柱周りの流れが  $\zeta$  平面にあるとすれば、ジューコフスキー変換は

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (6.1)$$

となる。ここで、 $a$  は円の半径である。この式は、 $z = z(\zeta)$  となっている。

次に、 $z$  平面上での速度を求め。共役複素速度より

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = \frac{\frac{dW}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}} \quad (6.2)$$

となる。ここで、変数  $\zeta$  は媒介変数 (parameter) の役割を演じている。つまり、

$$z = z(\zeta), \quad W = W(z) = W(z(\zeta)) = W(\zeta) \quad (6.3)$$

である。

円柱周りの複素速度ポテンシャル  $W(\zeta)$  は

$$W(\zeta) = U(\zeta - \zeta_0)e^{-i\alpha} + Ua^2 \frac{e^{i\alpha}}{\zeta - \zeta_0} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{a} \quad (6.4)$$

である。右辺第1項は一樣流、第2項は2重吹き出し、第3項は渦による回転流である。また、 $\zeta_0$  は円の中心の座標である。平板の場合には、 $\zeta_0 = 0$  である。以上の式を代入すると

$$u - iv = \frac{Ue^{-i\alpha} - Ua^2 \frac{e^{i\alpha}}{\zeta^2} - i \frac{\Gamma}{2\pi\zeta}}{1 - \frac{a^2}{\zeta^2}} \quad (6.5)$$

となる。

この式で、 $\zeta = a$  を代入すると、つまり、 $z$  平面では、 $z = 2a$  の点 (平板の後縁点に対応する) では、分母が0になってしまう。これは特異性 (singularity) を持つことになる。この特異性を除去するためには、分子が0になる必要がある (これを Kutta の条件, Kutta condition と呼ぶ)。つまり、

$$Ue^{-i\alpha} - Ue^{i\alpha} - i \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0 \quad (6.6)$$



従って、この式から、平板に生じる循環  $\Gamma$  が決定される。

$$\Gamma = -4\pi U a \sin \alpha \quad (6.7)$$

この  $\Gamma$  は負であるので、時計回転方向 (clockwise) の回転流が平板周りに付加されることになる。

## 6.2 後縁での速度

この場合に後縁 (trailing edge) での速度がどのようになっているか調べてみる。通常、クッタの条件より、後縁では速度は有限になっているはずである。

今、式 (6.5) は  $0/0$  の形になっているので、ここで、ロピタルの定理 (*L'Hôpital's rule*) を適用する。つまり、分母分子をそれぞれ  $\zeta$  で微分する。その結果は

$$\frac{2Ue^{i\alpha}a^2\frac{1}{\zeta^3} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\zeta^2}}{\frac{2a^2}{\zeta^3}} \quad (6.8)$$

となる。ここで、循環  $\Gamma$  に式 (6.7) を代入して、 $\zeta \rightarrow a$  とおくと、

$$u - iv = U \cos \alpha \quad (6.9)$$

となる。つまり、

$$u = U \cos \alpha, \quad v = 0 \quad (6.10)$$

である。このことから、後縁点では、速度の絶対値は  $U \cos \alpha$  で、これは 0 でないことに注意する必要がある。ただし、有限値であるので、クッタの条件は満たしている。

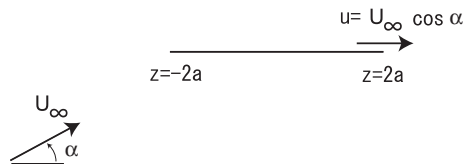


図 6.3: 後縁での速度

ちなみに、平板に沿う速度は、式 (6.5) から、循環に対して式 (6.7) を代入して、

$$u = U \frac{\cos(\theta/2 - \alpha)}{\cos(\theta/2)}, \quad x = 2a \cos \theta \quad (6.11)$$

となる。ここで、平板の上面は  $0 \leq \theta \leq \pi$  であり、下面は  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  である。

また、平板に沿う圧力は、ベルヌーイの式より、

$$C_p = 1 - \frac{\cos^2(\theta/2 - \alpha)}{\cos^2 \theta/2}, \quad x = 2a \cos \theta \quad (6.12)$$

となる。

(問題) 平板上の澱点を求めなさい。

### 6.3 平板に働く揚力

クッタジュコーフスキーの定理は、以前、式(5.45)で導出したように

$$L = -\rho U_{\infty} \Gamma \quad (6.13)$$

と書ける。この循環  $\Gamma$  に先ほど誘導した循環の式(6.7)を代入すると、揚力  $L$  は

$$L = 4\pi\rho U^2 a \sin\alpha \quad (6.14)$$

となる。

これを係数の形で表すと、揚力係数  $C_L$  は

$$C_L \equiv \frac{\text{揚力}}{\text{動圧} \times \text{基準面積}} = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 (4a \times 1)} = 2\pi \sin\alpha \quad (6.15)$$

となる。迎角が小さいときには、 $\sin\alpha \sim \alpha$  より

$$C_L \sim 2\pi\alpha \quad (6.16)$$

と近似される。つまり、揚力係数は、迎角に対して線形に(直線的に)変化する。

揚力傾斜  $C_{L\alpha}$  は、式(6.15)を迎角  $\alpha$  で微分して、

$$C_{L\alpha} \equiv \frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \cos\alpha \quad (6.17)$$

となる。迎角  $\alpha$  が小さいときには

$$C_{L\alpha} \approx 2\pi \quad (6.18)$$

と近似される。

(参考) 一様流の速度が増加して圧縮性が入ってくると、揚力傾斜  $C_{L\alpha}$  は以下ようになる。

- 亜音速流の場合 ( $M < 1$ )

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-M^2}} \quad (6.19)$$

- 超音速流の場合 ( $M > 1$ )

$$C_{L\alpha} = \frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \quad (6.20)$$

要約すると、亜音速では、非圧縮性流 ( $M = 0$ ) のときに比べて、マッハ数が増加するにつれて、揚力傾斜は増加する。一方、超音速流では、マッハ数が増加するにつれて、揚力傾斜は減少する。これらについては、テキスト「圧縮性流体力学」を参照されたい。

## 6.4 平板に働くモーメント

平板に働くモーメントは以下のようにして求めることができる。一般ジューコフスキー変換の場合、原点 ( $z = 0$ ) 周りのモーメントは、頭下げを正として、

$$M = -2\pi \frac{n^2 - 1}{3} \rho U^2 a^2 \sin 2\alpha \quad (6.21)$$

となる。従って、ジューコフスキー変換の場合には、 $n = 2$  とおいて、

$$M = -2\pi \rho U^2 a^2 \sin 2\alpha \quad (6.22)$$

となる。

(問題)： 式 (6.21) をブラシウスの公式を用いて誘導しなさい。

従って、モーメント係数  $C_M$  は

$$C_M \equiv \frac{\text{モーメント}}{\text{動圧} \times \text{基準面積} \times \text{腕の長さ}} = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 (4a)(4a)} = -\frac{1}{4}\pi \sin 2\alpha \quad (6.23)$$

つまり、頭上げのモーメントが生じて、不安定になる。(注意：モーメント係数は、モーメントに腕の長さが入ってくるため、この無次元化のために翼弦長  $4a$  でさらに割っている)

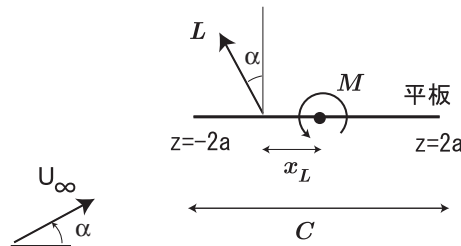


図 6.4: 圧力中心

揚力の式 (6.14) とモーメントの式 (6.22) を考慮することにより、圧力中心 (力が作用する位置) を決定できる。

$$x_L \times L \cos \alpha = |M| \rightarrow x_L = a \quad (6.24)$$

ここで、 $x_L$  は、平板の中心から圧力中心までの距離である。

平板の翼弦長は  $C = 4a$  より、圧力中心 (center of pressure) は

$$x_{cp} = \frac{1}{4}C \quad (6.25)$$

つまり、前縁から翼弦長 ( $C$ ) の  $1/4$  のところに圧力中心がある。これは迎角が変化しても変化しない。従って、この位置  $(1/4)C$  は空力中心 (aerodynamic center) でもある。

一般に薄翼理論では空力中心は  $(1/4)C$  のところにある。

(参考) 迎角  $\alpha$  を変化させて、揚力が 0 になるとき、必ずしもピッチングモーメントは 0 にならない。これは、偶力 (couple) という現象である。翼周りには、最初から単一の力が作用しているわけではなく、翼に沿って圧力が分布している。上面側に働く力と、下面側に働く力は、たとえその絶対値が同じでも、異なる作用点を持つ可能性がある。その結果偶力が発生し、モーメントが発生する。また、これが空力中心周りのモーメントでもある。(了)

## 6.5 円弧翼の場合

平板翼 (flat plate airfoil) の場合と同様に行うと、円弧翼 (circular arc airfoil) に作用する空気力が得られる。これは、キャンバーの効果 (camber effect) である。(厳密には、平板による迎角の効果 + キャンバーの効果)

平板の場合と同様に、ジュコフスキー変換を用いて変換する。

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (6.26)$$

平板の場合と違うものは、円柱周りの複素速度ポテンシャルである。

$$w(\zeta) = U(\zeta - \zeta_0)e^{-i\alpha} + Ub^2 \frac{e^{i\alpha}}{\zeta - \zeta_0} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{b} \quad (6.27)$$

ここで、注意することは、円の半径が  $a$  ではなく、 $b$  になっていることである。 $b$  は、

$$a = b \cos \beta \quad (6.28)$$

によって定義される (式 4.25 参照)。また、円の中心  $\zeta_0$  は、虚軸の正の方向に  $f$  だけずらされているので、

$$\zeta_0 = if \quad (6.29)$$

となる (図 4.6 参照)。

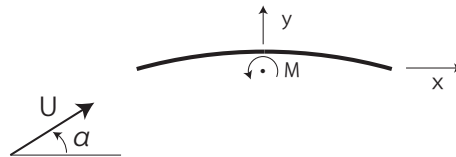


図 6.5: 円弧翼の場合

平板の場合と同様な操作を行うと、円弧翼周りの循環  $\Gamma$  が得られる。

$$\Gamma = -4\pi bU \sin(\alpha + \beta) \quad (6.30)$$

従って、クッタ・ジュコフスキーの定理より、揚力  $L$  は、

$$L = -\rho U \Gamma = 4\pi b \rho U^2 \sin(\alpha + \beta) \quad (6.31)$$

となる。ここで注意することは、平板の場合には  $\sin$  関数の前の係数が  $4\pi a\rho U^2$  であり、キャンバーを付けると  $b/a$  倍大きくなる。また、 $\sin$  関数の位相が  $\beta$  だけ増加する。つまり、迎角が 0 でも揚力が発生する。揚力が 0 となる  $\alpha = -\beta$  は零揚力角 (zero lift angle of attack) と呼ばれる。

揚力係数  $C_L$  は、

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{(1/2)\rho U^2 \cdot (4a \times 1)} \\ &= 2\pi(b/a) \sin(\alpha + \beta) = 2\pi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = 2\pi(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta) \end{aligned} \quad (6.32)$$

となる。迎角が小さいときには、つまり、 $\alpha \ll 1$  のときには、

$$C_L \simeq 2\pi(\alpha + \tan \beta) \quad (6.33)$$

となる。さらに、 $\alpha \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  の時には、

$$C_L \simeq 2\pi(\alpha + \beta) \quad (6.34)$$

となる。

航空機的设计で重要なデータである、揚力傾斜 ( $dC_L/d\alpha$ ) は、

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \frac{b}{a} \cos(\alpha + \beta) = 2\pi(\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta) \quad (6.35)$$

となる。迎角が小さいときには、

$$\frac{dC_L}{d\alpha} \simeq 2\pi(1 - \alpha \tan \beta) \quad (6.36)$$

と近似される。さらに、 $\alpha \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  の時には、

$$\frac{dC_L}{d\alpha} \simeq 2\pi(1 - \alpha\beta) \simeq 2\pi \quad (6.37)$$

となる。理由は、 $\alpha\beta$  が  $\epsilon^2$  つまり 2 次の微量となり、ここでは 1 次の微量まで考える場合には無視できる。

ピッチングモーメント  $M$  (頭下げが正) は、ブラシウスの公式より、

$$M = -2a^2U^2\rho\pi \sin 2\alpha + 4\pi\rho fbU^2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) \quad (6.38)$$

となる。右辺第 1 項は平板の寄与、第 2 項はキャンバーの寄与である。この式に、 $b = a \sec \beta$ ,  $f = a \tan \beta$  を代入して整理すると、

$$M = -2a^2U^2\rho\pi \sin 2\alpha \{1 - \tan \beta(\tan \alpha + \tan \beta)\} \quad (6.39)$$

と簡単化される。この式を見ると、キャンバーが付くと ( $\beta > 0$ )、ピッチングモーメントは、平板の場合より小さくなるのが分かる。

ピッチングモーメント係数  $C_M$  は、

$$C_M = \frac{M}{(1/2)\rho U^2(4a)^2} = -\frac{\pi \sin 2\alpha}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{fb}{a^2} \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) \quad (6.40)$$

となる。これも、右辺第1項は平板の寄与、第2項はキャンバーの影響である。

最後に、圧力中心として、中心 ( $x = 0$ ) から前方へのずれ  $x_L$  は、

$$\begin{aligned} x_L = \frac{|M|}{L \cos \alpha} &= \frac{2a^2 U^2 \rho \pi \sin 2\alpha \{1 - \tan \beta (\tan \alpha + \tan \beta)\}}{4\pi b \rho U^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha} \\ &= a \left\{ 1 - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right\} \{1 - \tan \beta (\tan \alpha + \tan \beta)\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

となる。この式を見ると、 $x_L$  は  $a$  より小さいことが分かる。また、この式で、 $\beta = 0$  (つまり  $b = a$ ) とおけば、 $x_L = a$  となり ( $x_{cp} = C/4$ )、平板の場合に一致する。

(問題) 円弧翼の場合の空力中心の位置を求めなさい。ただし、 $\alpha \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  として近似計算をすること。

## 第7章 薄翼理論

翼が薄い(つまり、翼の厚さが翼弦長に比べて小さい)という仮定を行うと、任意の翼型周りの流れにおいて、その速度分布と圧力分布を解析的に求めることができる。この手法を薄翼理論 (thin airfoil theory) と呼ぶ。

### 7.1 支配方程式

流れは非圧縮性のポテンシャル流れで表わされると仮定する。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.1)$$

である。ここで、

$$\vec{V} = \nabla \Phi \quad (7.2)$$

である。

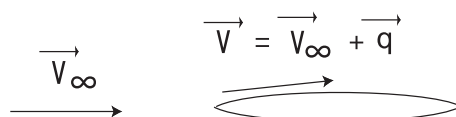


図 7.1: 薄翼近似での速度ベクトルの分解

翼が薄いとして、また迎角が小さいと仮定すると、翼周りの流れは一様流からあまり変化しないとして扱うことができる。そのとき、流れを一様流と擾乱流に分解する。

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_\infty + \vec{q}(x, y) \quad (7.3)$$

ここで、 $\vec{V}_\infty$  は一様流の速度、 $\vec{q}$  は擾乱速度である。これを速度成分で表せば、

$$U(x, y) = V_\infty \cos \alpha + u(x, y), \quad V(x, y) = V_\infty \sin \alpha + v(x, y) \quad (7.4)$$

となる。ここで、 $\alpha$  は迎角で、 $\vec{q} = (u, v)$  である。この結果、擾乱ポテンシャルが定義される。

$$\vec{q} = \nabla \phi, \quad \rightarrow \quad u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (7.5)$$

従って、全速度は

$$\nabla \Phi = \vec{V}_\infty + \nabla \phi \quad (7.6)$$

その結果、ポテンシャルは

$$\Phi = (xV_\infty \cos \alpha + yV_\infty \sin \alpha) + \phi \quad (7.7)$$

となる。式(7.1)に代入すれば、擾乱ポテンシャル  $\phi$  は以下の方程式を満たす。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.8)$$

## 7.2 境界条件

流れが物体に沿って流れるという条件は

$$\nabla \Phi \cdot \nabla F = 0 \quad (7.9)$$

で表される。ここで、

$$F(x, y) = 0 \quad (7.10)$$

が物体表面を表す。従って、 $\nabla F$  は翼表面に垂直方向のベクトルを表すことになる。

一方、無限遠方では

$$\nabla \Phi = \vec{V}_\infty \quad (7.11)$$

の条件となる。

上述した方法で、流れを一様流と擾乱速度に分けた場合、物体表面上での境界条件は

$$(\vec{V}_\infty + \nabla \phi) \cdot \nabla F = 0 \quad (7.12)$$

また、無限遠方では、擾乱速度が0になるので、

$$\nabla \phi \rightarrow 0 \quad (7.13)$$

となる。

ここで、境界条件の簡単化を考える。まず、物体表面上では、式(7.12)を書き下すと、

$$(V_\infty \cos \alpha + u) \frac{\partial F}{\partial x} + (V_\infty \sin \alpha + v) \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (7.14)$$

となる。

物体上面および下面を

$$y = \eta_u(x) : \text{上面}, \quad y = \eta_l(x) : \text{下面} \quad (7.15)$$

と表す。これらを一緒にして

$$y = \eta(x) \quad (7.16)$$

と表すことも可能である。つまり、

$$\eta(x) - y = 0 \quad (7.17)$$

となる。ここで、式(7.10)に基づき、

$$F = \eta(x) - y \quad (7.18)$$



の関数が定義される。ここで、 $(x, y)$  面上で  $F$  の値は分布するが、

$$F = 0 \quad (7.19)$$

のところは、物体表面に対応することになる。

関数  $F$  を  $x$  および  $y$  で偏微分する。式 (7.18) より、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1 \quad (7.20)$$

となる。

これを式 (7.14) に代入し、 $y$  方向の速度  $v$  を求めると、

$$v = (V_\infty \cos \alpha + u) \frac{d\eta}{dx} - V_\infty \sin \alpha \quad (7.21)$$

となる。この式の右辺第一項は非線形である。これを線形化するためにいくつかの仮定を行う。

- 翼は十分薄い。
- 迎角  $\alpha$  は小さい。

式で表せば

$$u \ll U_\infty, \quad v \ll U_\infty \quad (7.22)$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \quad (7.23)$$

$$V_\infty \cos \alpha \simeq V_\infty, \quad V_\infty \sin \alpha \simeq V_\infty \alpha \quad (7.24)$$

従って、

$$u \frac{\partial F}{\partial x} = u \frac{d\eta}{dx} \ll 1 \quad (7.25)$$

として、無視できる。

以上より、翼表面上での、線形化した境界条件は

$$v(x, \eta(x)) = V_\infty \frac{d\eta}{dx} - V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l \quad (7.26)$$

となる。

(注意): 厳密に言うと、前縁付近では、上述された近似は成立しない。しかし、この領域は全体から見ればほんの一部であるので、大勢に影響はないと考える。(了)

ただ、ここで、上記の境界条件はたとえ物体が薄いといえども物体表面上で課されることが問題となる。つまり、不便である。この問題は、次のようにして簡略化できる。物体表面上の  $y$  方向速度成分である  $v(x, \eta(x))$  を  $x$  軸、つまり、 $y = 0$  でテーラー展開する。

$$v(x, \eta(x)) = v(x, 0) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x,0} \eta(x) + \dots \quad (7.27)$$

この式から、 $v \sim O(\epsilon)$ ,  $\eta \sim O(\epsilon)$  であるので、右辺第2項は2次の微小量 ( $\epsilon^2$ ) として省略できる。つまり、ここでは、 $O(\epsilon)$  までの精度を考えているので、この項を省略しても、全体の精度を変えずに計算できる。

$$v(x, \eta(x)) \simeq v(x, 0) \quad (7.28)$$

従って、式(7.26)は最終的には

$$v(x, 0) = V_\infty \frac{d\eta}{dx} - V_\infty \alpha \quad (7.29)$$

となる。

翼面の上面、下面を区別すると

$$v(x, +0) = V_\infty \frac{d\eta_u}{dx} - V_\infty \alpha \quad (\text{翼上面}) \quad (7.30)$$

$$v(x, -0) = V_\infty \frac{d\eta_l}{dx} - V_\infty \alpha \quad (\text{翼下面}) \quad (7.31)$$

一方、式(7.29)の形から、ポテンシャル  $\phi$  は、次の2つのポテンシャル  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  に分解できる。

$$\nabla^2 \phi_1 = 0; \quad \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{x,0} = V_\infty \frac{d\eta}{dx} \quad (7.32)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0; \quad \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{x,0} = -V_\infty \alpha \quad (7.33)$$

式(7.32)と式(7.33)が意味するものは、それぞれ、

1. 流れ A: 迎角  $0^\circ$  の厚みのある翼まわりの流れ
2. 流れ B: 迎角  $\alpha$  の平板まわりの流れ

である。

1. の流れ A は、更に、以下の2つ(つまり、平均矢高曲線と厚み関数)に分解できる。まず、次の平均矢高関数 (mean camber function) を導入する。

$$\eta_c = \frac{1}{2} (\eta_u + \eta_l) \quad (7.34)$$

続いて、次の厚み関数 (thickness function) を導入する。

$$\eta_t = \frac{1}{2} (\eta_u - \eta_l) \quad (7.35)$$

これらを使って、上面および下面は以下のように定義できる。

$$\eta_u = \eta_c + \eta_t, \quad \eta_l = \eta_c - \eta_t \quad (7.36)$$

従って、境界条件は

$$\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{x,+0} = V_\infty \left( \frac{d\eta_c}{dx} + \frac{d\eta_t}{dx} \right) \quad \text{at } y = +0 \quad \text{上面側} \quad (7.37)$$

$$\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{x,-0} = V_\infty \left( \frac{d\eta_c}{dx} - \frac{d\eta_t}{dx} \right) \quad \text{at } y = -0 \quad \text{下面側} \quad (7.38)$$

これらを一つの式で表すと

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)_{x,\pm 0} = V_\infty \left(\frac{d\eta_c}{dx} \pm \frac{d\eta_t}{dx}\right) \quad (7.39)$$

となる。

以上のことから、一つの翼型まわりの流れは、

1. 対称翼（迎角  $0^\circ$ ）まわりの流れ
2. 矢高（camber、迎角  $0^\circ$ ）まわりの流れ
3. 平板（迎角  $\alpha$ ）まわりの流れ

に分解できる。逆に言えば、これらを加え合わせると、一つの翼型周りの流れが合成できる。

この変形判として、2番目と3番目を一緒にすることも可能である。つまり、

1. 対称翼（迎角  $0^\circ$ ）まわりの流れ
2. 迎角を持つ矢高まわりの流れ

である。

それぞれが、複素関数論を使った複素速度ポテンシャルで解ける可能性があるが、ここでは、特異性分布を重ね合わせ（superimpose）する方法について説明する。これらは、有限スパン翼や回転体まわりの流れなどの3次元流れにも拡張できる。その場合には、特異性を3次元のものに置き換える。

### 7.3 圧力係数の求め方

物体まわりの圧力分布は、圧力係数によって表される。ベルヌーイの式より圧力  $p$  は

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right) \quad (7.40)$$

である。圧力係数の定義は、圧力差 / 動圧、つまり、

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho V_\infty^2} \quad (7.41)$$

であるので、式(7.40)を使って、

$$C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \quad (7.42)$$

となる。

局所局所での速度  $V$  は

$$V^2 = (\vec{V}_\infty + \vec{q}) \cdot (\vec{V}_\infty + \vec{q}) \quad (7.43)$$

となる。ここで、 $\vec{V}_\infty$  は一様流ベクトル、 $\vec{q}$  は擾乱速度ベクトルで

$$\vec{V}_\infty = (V_\infty \cos \alpha, V_\infty \sin \alpha), \quad \vec{q} = (u, v) \quad (7.44)$$

で、 $\alpha$  は迎角である。

式 (7.43) を  $V_\infty^2$  で割り、展開すると、

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{u}{V_\infty} \cos \alpha + \frac{v}{V_\infty} \sin \alpha\right) + \left(\frac{u}{V_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v}{V_\infty}\right)^2 \quad (7.45)$$

となる。ここでは、迎角が小さいとして、近似する。

$$\cos \alpha \rightarrow 1, \quad \sin \alpha \rightarrow \alpha, \quad (7.46)$$

また、 $(u^2 + v^2)/V_\infty^2$  は 2 次の微小量として無視できる。これらの近似を式 (7.45) に適用すると以下ようになる。

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{u}{V_\infty} + \frac{v}{V_\infty}\alpha\right) \simeq 1 + 2\frac{u}{V_\infty} \quad (7.47)$$

ここで、また、2 次の微小量は無視されている。これを式 (7.40) に代入すると

$$p = p_\infty - \rho V_\infty u \quad (7.48)$$

となる。従って、圧力係数  $C_p$  は

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho V_\infty^2} = -2\frac{u}{V_\infty} \quad (7.49)$$

となる。この式を見ると、圧力係数  $C_p$  は  $u$  に関して線形であるから、全体の圧力係数は、それぞれの解を足し合わせて求めることができる。また、力やモーメントも同様に重ね合わせ (superpose あるいは superimpose) できる。

## 7.4 対称翼の場合

対称翼では、迎角が 0 であれば、力も掛からないし、モーメントも生じない。圧力分布が発生するのみである。解くべき方程式は、ポテンシャル流であるので

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7.50)$$

境界条件は、 $x$  軸上で

$$v(x, \pm 0) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \pm 0) = \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx} \quad \text{for } 0 \leq x \leq l \quad (7.51)$$

となる。また、遠方では

$$\nabla \phi = 0 \quad (7.52)$$

この翼周りの流れには循環が 0 になり、従って、揚力は 0 である。 $y$  方向の速度成分は

$$v(x, +0) = -v(x, -0) \quad (7.53)$$

つまり、上面と下面では反対方向になる。

これらの流れは、 $x$  軸に沿って、吹き出しを分布させることによって再現できる。点  $(\xi, 0)$  に単位長さ当たりの吹き出しの強さが  $\sigma$  の吹き出しが存在し、これが作り出す速度ポテンシャルを考える。その後、これを  $\xi = 0$  から  $\xi = l$  まで積分することによって全体の速度ポテンシャル  $\phi$  が求められる。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sigma(\xi) \ln[(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} d\xi \quad (7.54)$$

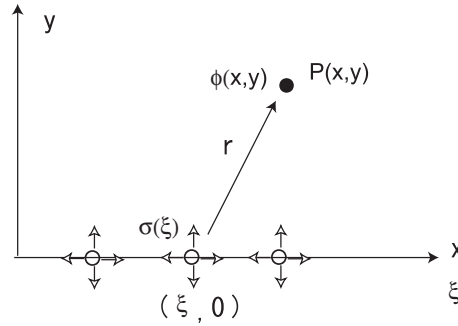


図 7.2: 対称翼：吹き出し分布で近似

$x$  および  $y$  方向の速度分布は、 $u = \partial\phi/\partial x$ ,  $v = \partial\phi/\partial y$  から

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sigma(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.55)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sigma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.56)$$

となる。この式に含まれる  $\sigma$  が未知量となる。

この  $\sigma(\xi)$  を決定するために、 $v$  の値に対して境界条件を課する。

$$v(x, \pm 0) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sigma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right] = \pm V_\infty \frac{d\eta_t}{dx} \quad (7.57)$$

この式で、 $\xi \neq x$  であれば、被積分関数は 0 になる（つまり、 $\xi = x$  以外の  $\xi$  での  $\sigma(\xi)$  の寄与は 0 である）。一方、 $\xi = x$  の時には、

$$v = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \sigma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = \pm \frac{\sigma(x)}{2} \quad (7.58)$$

となる。これに関しては、後で証明する。

従って、式 (7.57) と式 (7.58) より、

$$\sigma(x) = 2v(x, +0) = 2V_\infty \frac{d\eta_t}{dx} \quad (7.59)$$

が得られる。これは大変簡単な関係式で、吹き出しの強さが翼表面の傾斜から局所的に決定されることを示している。

これを式(7.54)、(7.55)、(7.56)に代入すると、速度ポテンシャルと速度成分は以下のようになる。

$$\phi(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{d\eta_t}{dx} \ln[(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} d\xi \quad (7.60)$$

$$u(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{d\eta_t}{dx} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.61)$$

$$v(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{d\eta_t}{dx} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.62)$$

(参考)：式(7.58)の証明

$\xi = x$ の近傍で考える。

$$A = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \sigma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \simeq \sigma(x) \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = 2\sigma(x) \int_{x-\epsilon}^x \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.63)$$

ここで、次の積分を考える。

$$B = \int_{x-\epsilon}^x \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{y^2} \int_{x-\epsilon}^x \frac{y}{1 + \{(x - \xi)/y\}^2} d\xi \quad (7.64)$$

ここで、 $(x - \xi)/y = t$ とおくと

$$B = \frac{y}{y^2} \int_{\epsilon/y}^0 \frac{-y}{1 + t^2} dt = \tan^{-1} \frac{\epsilon}{y} \quad (7.65)$$

従って、式(7.63)は

$$A = 2\sigma(x) \tan^{-1} \frac{\epsilon}{y} \quad (7.66)$$

となる。ここで、 $y \rightarrow 0$ にすると

$$A = 2\sigma(x) \frac{\pi}{2} = \pi\sigma(x) \quad (7.67)$$

となる。以上より、

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sigma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{\sigma(x)}{2} \quad (7.68)$$

となり、これで証明終わり。(了)

圧力係数  $C_p$  は、

$$C_p(x, y) = -2 \frac{u(x, y)}{V_\infty} \quad (7.69)$$

従って、翼面上では

$$C_p(x, 0) = -2 \frac{u(x, 0)}{V_\infty} \quad (7.70)$$

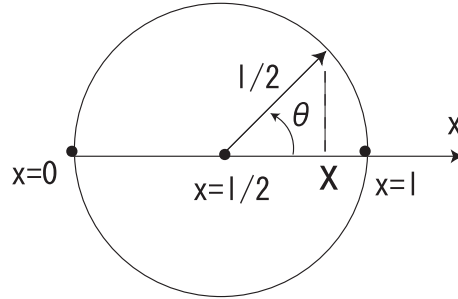


図 7.3: 座標変換

式 (7.61) より、 $u(x, 0)$  は

$$u(x, 0) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{d\eta_t}{dx}(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi \quad (7.71)$$

この式は、 $\xi = x$  で特異性 (singularity) を示す。

ここで、 $u(x, 0)$  や  $d\eta_t/dx$  を  $\theta$  や  $\phi$  で表した方が便利である。つまり、

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta) \quad \xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \phi) \quad (7.72)$$

を使用する。ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$  は上面を、 $-\pi \leq \theta \leq 0$  は下面を表す。また、 $\theta$ 、 $\phi$  は  $x$  軸の正 (つまり、下流方向) からの角度である。

$$x - \xi = \frac{l}{2}(\cos \theta - \cos \phi), \quad d\xi = -\frac{l}{2} \sin \phi d\phi \quad (7.73)$$

より、式 (7.71) は、

$$u(\theta) = -\frac{V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_t}{dx}(\phi) \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi \quad (7.74)$$

となる。この式 (7.74) を解くには、ポアソン積分公式 (Poisson's integral formula) が適用できる。

$d\eta_t/dx(\theta)$  は  $\theta$  に関して奇関数 (odd function) である。従って、

$$\frac{d\eta_t}{dx}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (7.75)$$

と  $\theta$  で展開できる。ここで、係数  $A_n$  は

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_t}{dx}(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.76)$$

より求められる。これを使うと、ポアソン積分公式より、式 (7.74) の解、つまり、 $u(\theta)/V_\infty$  は共役フーリエ級数 (conjugate Fourier series) で与えられる。

$$\frac{u(\theta)}{V_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (7.77)$$

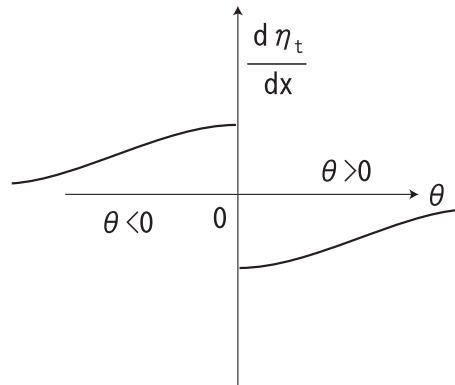


図 7.4: 翼後縁付近での厚み関数の勾配分布

[注意] 式 (7.75) を式 (7.74) に代入し、三角関数の公式を利用して変形する。これに、後述する式 (7.107) を適用し、再度三角関数の公式を使って整理すると、式 (7.77) が得られる。

[注意終わり]

これで、微小速度  $u$  が得られたので、圧力係数  $C_p$  は

$$C_p = -\frac{2u(\theta)}{V_\infty} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (7.78)$$

となる。つまり、 $C_p$  は  $\theta$  に関してフーリエ級数としていくつかの項から計算される。また、 $\cos \theta$  だけで表されるので、確かに翼の上下面で対称となっている。

問題： 曲率半径  $R = 2m$  の 2 重円弧翼の場合の圧力係数分布を求めよ。

## 7.5 反り板周りの流れ

ここでは、反り板 (cambered plate) 周りの流れについて勉強する。迎角は 0 として考える。先ず、定式化として、微小擾乱ポテンシャル  $\phi$  に対して、以下の式を考える。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7.79)$$

$$v(x, \pm 0) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \pm 0) = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx} \quad \text{for } 0 \leq x \leq l \quad (7.80)$$

$$\nabla \phi = 0 \quad \text{for } |\vec{r}| \rightarrow \infty \quad (7.81)$$

$y = \eta_c(x)$  は反り板 (厚さ 0) の形状を表わす関数で、式 (7.80) は、流れが板に沿う、つまり、流れの速度ベクトルの向きが板の勾配に等しい、という条件である。

この流れの場合、翼周りの循環は 0 ではない。翼後縁でクッタの条件 (Kutta condition) が適用される。つまり、

クッタの条件：翼後縁で  $u = \partial \phi / \partial x$ ,  $v = \partial \phi / \partial y$  が有限で、かつ、連続である。



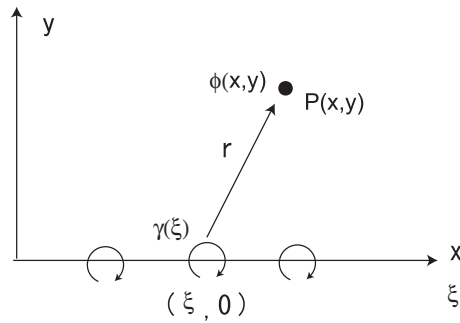


図 7.5: 反り板：渦分布で近似

この翼周りの流れは、特異性の一つである渦の分布で表される。この渦分布による解はラプラスの方程式の解となっており、また、遠方での境界条件は自動的に満たされている。ただ、物体表面上での境界条件は満足させる必要がある。

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \tan^{-1} \frac{y}{x - \xi} d\xi \quad (7.82)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.83)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.84)$$

ここで、渦  $\gamma$  ( $\gamma$  は循環の強さ) の向きが本来の向きと逆になっているために、ここでは、符号に注意する必要がある。

翼面上の圧力係数  $C_p$  は

$$C_p(x, \pm 0) = -2 \frac{u(x, \pm 0)}{V_\infty} \quad (7.85)$$

速度  $u(x, \pm 0)$  は

$$u(x, \pm 0) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (7.86)$$

吹出しを使って計算で得た式 (7.58) の関係を利用すると

$$u(x, \pm 0) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \quad (7.87)$$

式 (7.87) を式 (7.85) に代入すると

$$C_p(x, \pm 0) = \mp \frac{\gamma(x)}{V_\infty} \quad (7.88)$$

となる。

### 7.5.1 揚力

翼に作用する揚力は、翼上下面の圧力を使って、

$$L = \int_0^l [p(x, -0) - p(x, +0)] dx \quad (7.89)$$

となる。この式の圧力  $p$  を圧力係数  $C_p$  で書き換えると、

$$L = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \int_0^l [C_p(x, -0) - C_p(x, +0)] dx \quad (7.90)$$

となる。この式の圧力係数に、式 (7.88) を代入すると、

$$L = \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx \quad (7.91)$$

となる。ちなみに、ストークスの定理より、

$$\int_0^l \gamma(x) dx = \Gamma \quad (7.92)$$

であるので、式 (7.91) は、

$$L = \rho V_\infty \Gamma \quad (7.93)$$

となり、クッタ・ジュコフスキーの定理と一致している。ここで、 $\Gamma$  は翼周りの循環 (circulation) である。

揚力係数は、式 (7.91) より、

$$C_L = \frac{L}{(1/2)\rho V_\infty^2 S} = \frac{2}{V_\infty} \frac{1}{l} \int_0^l \gamma(x) dx \quad (7.94)$$

となる。ただし、基準面積  $S$  は、 $S = l \times 1$  である。このように、渦の分布が分かれば、 $C_L$  が決定できる。ちなみに、圧力係数から揚力係数を求めるには、式 (7.90) を無次元化して、

$$C_L = \frac{1}{l} \int_0^l [C_p(x, -0) - C_p(x, +0)] dx \quad (7.95)$$

となる。

### 7.5.2 ピッチングモーメント

前縁まわりのモーメントは、頭上げを正として

$$M = \int_0^l [p(x, +0) - p(x, -0)] x dx \quad (7.96)$$

$$= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \int_0^l (C_p(x, +0) - C_p(x, -0)) x dx \quad (7.97)$$

$$= -\rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) x dx \quad (7.98)$$

となる。この式が負の値を示すのは、実際には頭下げになるためである。

ピッチングモーメント係数は、

$$C_M = \frac{M}{(1/2)\rho V_\infty^2 S l} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \gamma(x) x dx \quad (7.99)$$

となる。ただし、基準面積  $S$  は、 $S = l \times 1$  である。ピッチングモーメントの無次元化には、分母に基準面積のほかに腕の長さの基準量  $l$  が入っていることに注意されたい。この場合も、渦分布が分かれば、この式から  $C_M$  が決定できる。ちなみに、圧力係数からピッチングモーメントを決定する場合には、式 (7.97) より、

$$C_M = \frac{1}{l^2} \int_0^l [C_p(x, +0) - C_p(x, -0)] x dx \quad (7.100)$$

となる。

### 7.5.3 渦分布の決定

次に、どのようにして  $\gamma(x)$  の分布を決定するかを考える。翼面上での  $y$  方向の速度成分  $v$  は、式 (7.80) と式 (7.84) より

$$v(x, \pm 0) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \left[ -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right] = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx} \quad (7.101)$$

ただし、 $0 \leq x \leq l$  である。

$y \rightarrow \pm 0$  より、左辺が変形される。

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx} \quad (7.102)$$

この式の左辺はコーシー (Cauchy) の主値 (principal value) より計算できる。

ここで、クッタ (Kutta) の条件が課される。渦のある場所では速度が無限大になるため、後縁では渦を置く事が出来ない。そのため、

$$\gamma(x = l) = 0 \quad (7.103)$$

である必要がある。

式 (7.102) を条件 (7.103) の下に解く。まず、

$$I = \int_0^l \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (7.104)$$

を考える。求めたい点  $x$  に対して  $\theta$  を、積分変数  $\xi$  に対して  $\phi$  をそれぞれ変数として、

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta), \quad \xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \phi) \quad (7.105)$$

のように変換する。これを式 (7.104) に代入すると

$$I = - \int_0^\pi \gamma(\phi) \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi \quad (7.106)$$

ここで、以下の公式を使用する。この公式は大変重要で、このテキストでは頻繁に利用される。

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.107)$$

ここで、 $n = 0$  の場合には、

$$\int_0^\pi \frac{d\phi}{\cos \phi - \cos \theta} = 0 \quad (7.108)$$

となる。式 (7.106) より、もし、

$$\gamma(\theta) = \frac{K}{\sin \theta} \quad (7.109)$$

であれば、 $I$  は 0 になる。この式 (7.109) は後で齊次解を構築する。

式 (7.102) を変数  $\theta$  と  $\phi$  で表すと

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\phi)}{2V_\infty} \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) \quad (7.110)$$

ここで、右辺は  $x$  の関数が  $\theta$  の関数として表されている。

式 (7.110) は、ポアソンの積分公式で表される。つまり、左辺の  $\gamma/2V_\infty$  と右辺の  $d\eta_c/dx$  は、共役複素級数 (Conjugate Fourier Series) で表される。

$d\eta_c/dx$  は  $\theta$  の関数で、 $\theta$  に関して偶関数であるので、以下のように表される。

$$\frac{d\eta_c}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \quad (7.111)$$

ここで、係数  $B_n$  は

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c}{dx} \cos n\theta d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.112)$$

となる。

式 (7.111) を式 (7.110) に代入すると

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\phi)}{2V_\infty} \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \quad (7.113)$$

が得られる。

式 (7.113) の解は

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta) + \frac{K}{\sin \theta} \quad (7.114)$$

となる。ここで、 $\gamma_1(\theta)$  は以下の方程式の解である。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma_1(\phi)}{2V_\infty} \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \quad (7.115)$$

また、 $\gamma_2(\theta)$  は以下の方程式の解である。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma_2(\phi)}{2V_\infty} \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \frac{B_0}{2} \quad (7.116)$$

$\gamma_1(\theta)$  は、ポアソン積分の共役複素級数の関係より

$$\gamma_1(\theta) = -2V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (7.117)$$

となる。

この式の証明：  $\gamma_1$  の中で、一つの項  $\sin n\theta$  を取り出して考える。これを式 (7.115) の左辺に代入すると、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin n\phi}{2V_\infty} \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi \quad (7.118)$$

となる。ここで、被積分関数の分子は、

$$\sin n\phi \sin \phi = -\frac{1}{2}(\cos(n+1)\phi - \cos(n-1)\phi) \quad (7.119)$$

と変形される。これを式 (7.118) に代入すると、

$$\frac{-1}{4\pi V_\infty} \left\{ \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi - \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi \right\} \quad (7.120)$$

となる。これに式 (7.107) の公式を適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{4\pi V_\infty} \left\{ \pi \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \pi \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} \right\} \\ &= \frac{-1}{4V_\infty \sin \theta} \{ \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta \} \\ &= \frac{-1}{4V_\infty \sin \theta} \{ 2 \cos n\theta \sin \theta \} \\ &= -\frac{\cos n\theta}{2V_\infty} \end{aligned} \quad (7.121)$$

$\gamma_1$  は、式 (7.117) を見ると、実際には、係数  $-2V_\infty B_n$  が掛かかり、かつ、 $\sum_n$  であるので、これらを考慮すると、式 (7.115) が証明される。

証明終わり

また、式 (7.107) の公式で、 $n=1$  とすると、

$$\int_0^\pi \frac{\cos \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \pi \quad \text{or} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = 1 \quad (7.122)$$

となる。従って、式 (7.116) の解は

$$\gamma_2(\theta) = V_\infty B_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (7.123)$$

となる。

以上より、求めたい分布  $\gamma(\theta)$  は

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \sum_1^\infty B_n \sin n\theta + \frac{V_\infty B_0}{\sin \theta} \left( \frac{K}{V_\infty B_0} + \cos \theta \right) \quad (7.124)$$

となる。この中に含まれる係数  $K$  を決定するためには、クッタの条件 ( $\gamma(\theta = 0) = 0$ ) を適用する。その結果

$$K = -V_\infty B_0 \quad (7.125)$$

が得られる。

以上より

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left( \frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right) \quad (7.126)$$

となる。この  $\gamma(\theta)$ 、あるいは、 $B_n$  を使って、すべての空力係数が計算できる。係数  $B_n$  は、式 (7.112) より、ある反り形状を展開したときの係数である。

圧力係数  $C_p$  は、

$$C_p(\theta) = C_p[x(\theta), \pm 0] = \mp \frac{\gamma(\theta)}{V_\infty} = \pm 2 \left[ \frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right] \quad (7.127)$$

となる。

揚力係数およびモーメント係数は、式 (7.94) と式 (7.99) より

$$C_L = \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (7.128)$$

$$C_M = -\frac{1}{2V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (7.129)$$

となる。

式 (7.126) を式 (7.128) および式 (7.129) に代入すると

$$C_L = -(B_0 + B_1)\pi \quad (7.130)$$

$$C_M = B_0 \frac{\pi}{4} + B_1 \frac{\pi}{2} + B_2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (B_0 + B_1) + \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2) \quad (7.131)$$

このピッチングモーメントは更に次のように書くことができる。

$$C_M = -\frac{C_L}{4} + \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2) \quad (7.132)$$

この式は、まさに空力中心および空力中心周りのモーメントの定義を表わしている。このモーメントの説明としては、前縁から  $1/4$  に揚力が掛かると考えたときのモーメントと、そのまわりに発生するモーメントの2つのモーメントからなっている。2番目のモーメントは一定値であるので、迎角に依存しない。

$B_1 + B_2 \neq 0$  の場合には、圧力中心は  $1/4C$  ではない。この場合、第2項の  $\pi/4 \times (B_1 + B_2)$  は空力中心周りのモーメント  $C_{mac}$  となり、空力中心は  $X_{ac} = C/4$  である。圧力中心  $X_{cp}$  は、

$$\frac{X_{cp}}{C} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} \frac{B_1 + B_2}{C_L} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{B_1 + B_2}{B_0 + B_1} \right) \quad (7.133)$$

となる。

## 7.6 迎角のある平板

ここでは、迎角のある平板まわりの流れを調べる。この流れは、擾乱ポテンシャル  $\phi$  に対して

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7.134)$$

$$v(x, \pm 0) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \pm 0) = -V_\infty \alpha \quad (0 \leq x \leq l) \quad (7.135)$$

$$\nabla \phi = 0 \quad \text{at infinity} \quad (7.136)$$

2番目の式は、迎角  $\alpha$  を持つ主流の  $y$  方向成分（鉛直方向成分）である  $U \sin \alpha$  を、擾乱速度で打ち消し、その結果、平板に沿う流れ、つまり、 $y$  方向成分が 0 になるようにしている。

その他、クッタの条件として、 $\partial \phi / \partial x$  と  $\partial \phi / \partial y$  は、後縁で有限値を持つ。

$\gamma(x)$  が平板上に分布している場合、式 (7.102) より

$$v(x, \pm 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} = -V_\infty \alpha \quad (7.137)$$

クッタの条件より

$$\gamma(x = l) = 0 \quad (7.138)$$

ここで、 $\theta$  と  $\phi$  を導入すると

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta), \quad \xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \phi) \quad (7.139)$$

これを代入すると

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma(\phi) \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = -2V_\infty \alpha \quad (7.140)$$

となる。この式を整理すると、

$$\int_0^\pi \frac{\gamma(\phi)}{-2V_\infty \alpha} \times \frac{\sin \phi}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \pi \quad (7.141)$$

となる。

この方程式の解は、斉次解と特解の和として、前述の公式 (7.107) を利用して

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \alpha \times \frac{1}{\sin \theta} (K + \cos \theta) \quad (7.142)$$

と表すことができる。クッタの条件を  $x = l(\theta = 0)$  で満足させると、分母は  $\sin \theta = 0$  となるので、分子は 0 になる必要がある。従って、

$$K = -1 \quad (7.143)$$

となる。ちなみに、クッタの条件は、 $\gamma(\theta = 0) = 0$  である。

以上より、

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \alpha \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} \quad (7.144)$$

となる。

圧力係数  $C_p$  は

$$C_p(\theta) = \mp 2\alpha \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \mp 2\alpha \tan(\theta/2) \quad (7.145)$$

ここで、注意することは、この式は  $0 \leq \theta \leq \pi$  についてのみ考えており、上面下面の区別は、符号  $\mp$  で行っている。上面は負で、下面は正である。

揚力およびモーメント係数は

$$C_L = \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = 2\pi\alpha \quad (7.146)$$

$$C_M = -\frac{1}{2V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\alpha = -\frac{C_L}{4} \quad (7.147)$$

このように、平板の場合には、前縁から  $1/4$  翼弦長のところに揚力が作用するだけである。この点が圧力中心 (center of pressure) である。圧力中心の位置は迎角により変化しない。この点でのモーメントは  $0$  で、迎角  $\alpha$  が変化しても、 $0$  のままである。従って、この点は、空力中心 (aerodynamic center) である。空力中心まわりのモーメントは  $0$  になる。つまり、 $C_{mac} = 0$  である。

一般的に、圧力中心位置  $x_{cp}$ 、空力中心位置  $x_{ac}$ 、揚力係数  $C_l$ 、空力中心周りのモーメント  $C_{mac}$  には、次の関係がある。

$$x_{cp} = x_{ac} - \frac{C_{mac}}{C_l} \quad (7.148)$$

ここで、 $C_{mac}$  は、頭上げを正としている。

(注意)

空力中心 (aerodynamic center) とは、その点でのピッチングモーメントが迎角に依存しない点である。このように迎角に依存しない一定値をとることが大変重要である。空力中心は、航空機の安定性や制御を考える上で有用で、揚力 ( $C_L$ ) や抗力 ( $C_D$ ) を空力中心上で考え、かつそこでのモーメントを  $C_{mac}$  とすれば、これらを使って航空機全体のモーメントが計算でき、そのモーメントが  $0$  になったとき、trim がとれた平衡状態にある。(了)

## 7.7 薄翼の空力特性

以上述べた結果を加え合わせることで、任意形状の薄翼の空力特性を計算することができる。

$$\frac{d\eta_\pm}{dx} = \frac{d\eta_c}{dx} \pm \frac{d\eta_t}{dx} \quad (7.149)$$

変数  $\theta$  を使う。

$$\frac{d\eta}{dx}(\theta) = \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) \pm \frac{d\eta_t}{dx}(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (7.150)$$

ここで、符号  $\pm$  は、上面および下面を表す。

フーリエ級数で展開すると

$$\frac{d\eta}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \pm \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (7.151)$$



ここで、係数  $A_n, B_n$  はそれぞれ

$$A_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{d\eta}{dx}(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.152)$$

$$B_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{d\eta}{dx}(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.153)$$

翼面上の圧力分布は、迎角  $\alpha$  を持つ平板の場合を加えて、

$$C_p = \mp 2 \left[ \left( \alpha - \frac{B_0}{2} \right) \tan \frac{\theta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \pm \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right] \quad (7.154)$$

となる。ここでは、 $0 \leq \theta \leq \pi$  だけを考えている。従って、上の符号は上面を、下の符号は下面を表す。

揚力係数は

$$C_L = 2\pi\alpha - (B_0 + B_1)\pi = 2\pi \left( \alpha - \frac{B_0 + B_1}{2} \right) \quad (7.155)$$

揚力傾斜 (lift slope) は

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi \quad (7.156)$$

一定値となる。

ここで、重要なことは

1. 厚みは何ら揚力には寄与しない (係数  $A_n$  が入って来ない)。
2. キャンバーが迎角 0 での揚力や、揚力 0 での迎角を決定する。ちなみに、揚力 0 での迎角は

$$\alpha_0 = \frac{B_0 + B_1}{2} \quad (7.157)$$

である。

一方、前縁を基準にしたモーメント係数 (頭上げを正とする) は

$$C_M = -[2\pi\alpha - (B_0 + B_1)\pi] \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) = -\frac{C_L}{4} + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \quad (7.158)$$

となる。また、ここでの  $C_L$  は、平板と反り翼の揚力係数の和である。

このことから

- 厚みは何らモーメントには作用しない。
- モーメントは、1/4 弦長に掛かる力と、その点まわりのモーメントから出来ている。
- 1/4 弦長は空力中心となり、その点まわりのモーメントは、

$$C_M = \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \quad (7.159)$$

である。

参考：飛行機の縦安定 飛行機の縦安定とは、重心周りのピッチングモーメント  $C_M$  の迎角  $\alpha$  による変化が、ピッチングモーメントの定義として頭上げを正とした場合、

$$\frac{dC_M}{d\alpha} < 0 \quad (7.160)$$

となるように設計することである。第 7.6 図から、 $C_M = 0$  になる点 ( $\alpha = \alpha_e$ ) をトリム点と呼ぶ。飛行機はこの状態で安定に飛行することができる。このトリム点は安定平衡点で、例えば、 $\alpha > \alpha_e$  になると (ピッチアップ)、 $C_M < 0$  になって、頭下げになり (ピッチダウン)、もとの姿勢に戻る。逆に、 $\alpha < \alpha_e$  になると (ピッチダウン)、 $C_M > 0$  になって、頭上げになり (ピッチアップ)、やはりもとの平衡点に戻る。

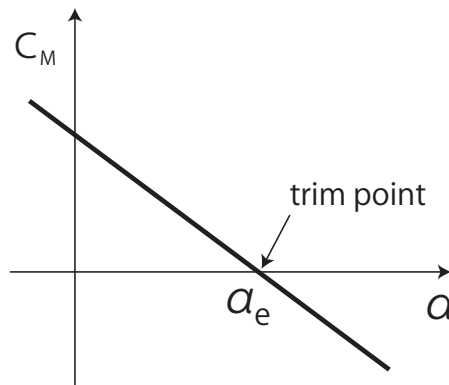


図 7.6: 縦安定

ちなみに、通常、揚力係数  $C_L$  は、迎角  $\alpha$  が大きくなると線形的に大きくなるので、式 (7.160) は、以下のようにも書くことができる。

$$\delta C_L \sim \delta \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{dC_M}{dC_L} < 0 \quad (7.161)$$

参考：3次元翼における揚力傾斜 ( $C_{L\alpha}$ )

航空機的设计 (飛行制御) においては、 $C_{L\alpha} = dC_L/d\alpha$  は大事な特性量である。つまり、揚力係数そのものではなく、迎角を少し変えたときに揚力係数がどれだけ変化するかが分かれば、飛行制御的设计に使用できる。

2次元翼では、理想的には、 $C_{L\alpha} = 2\pi$  であるが、3次元翼になると、この値より、小さくなる。3次元翼における、 $C_{L\alpha}$  の経験式は、例えば、以下のようなものがある。

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi AR}{2 + \sqrt{4 + \frac{(AR)^2 \beta^2}{\eta^2} \left(1 + \frac{\tan^2 \Lambda_{max,t}}{\beta^2}\right)}} \quad (7.162)$$

ここで、 $AR$  はアスペクト比、 $\beta = \sqrt{1 - M^2}$  である。また、 $\Lambda_{max,t}$  は、最大厚み位置に関する後退角である。さらに、 $\eta$  は翼の効率を表し、

$$\eta = \frac{C_{l\alpha}}{2\pi/\beta} \quad (7.163)$$

で定義される。 $C_{l\alpha}$  は、2次元翼での揚力傾斜である。この  $\eta$  の値は、通常、 $\eta = 0.95 \sim 1.0$  で近似される。

なお、このような揚力傾斜 (lift slope)  $C_{L\alpha}$  は空力微係数 (aerodynamic derivatives) と呼ばれる。3次元の場合、横すべり角  $\beta$  に関するヨーイングモーメント傾斜  $C_{n\beta}$  は、横方向の安定性には重要な役割を演じる。 $C_{n\beta} > 0$  の場合、横すべり角  $\beta$  が大きくなると、その角度を益々大きくする方向のモーメントが発生し不安定になる。その意味では、 $C_{n\beta} < 0$  となるように設計すべきである。



## 第8章 有限翼理論

今までは、2次元翼について勉強してきたが、実際の飛行機は3次元翼であるので、この章では、3次元翼について述べる。翼の平面形状にはいくつかあり、例えば、矩形翼 (rectangular wing)、先細翼 (tapered wing)、後退翼 (swept wing)、デルタ翼 (delta wing) などがある。低速では、矩形翼や先細翼のような横方向に延びた翼が揚力的な観点から好ましく、高速では、後退角 (sweep) のついた翼が抵抗的な観点から好ましい。

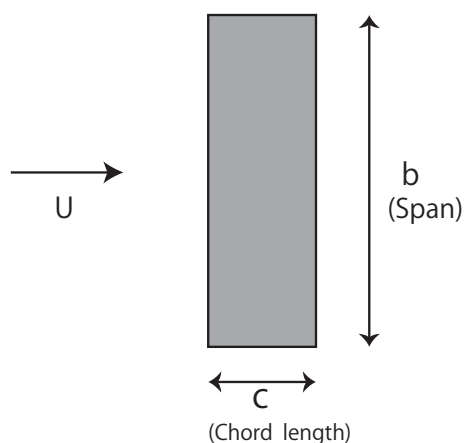


図 8.1: 平均空力翼弦 (MAC)

### 8.1 アスペクト比

アスペクト比は、3次元翼を表す大事なパラメータである。アスペクト比 (Aspect Ratio) の定義は

$$AR = \frac{b^2}{S} \quad (8.1)$$

である。ここで、 $S$  は翼面積を、 $b$  は翼巾 (span) を表す。矩形翼に対するアスペクト比は、 $S = b \times c$  より

$$AR = \frac{b}{c} \quad (8.2)$$

となる。ここで、 $c$  は翼弦長 (chord length) である。

(参考1) 代表的な航空機のアスペクト比は、ボンバルディア (Bombardier) Dash8(Q400) が  $AR = 12.8$ 、B787 は  $AR \simeq 10$ 、B737-800 は  $AR = 9.45$ 、小型機のセスナ (Cessna 172) は  $AR = 7.3$ 、B747 は  $AR = 7$ 、戦闘機の F15 は  $AR = 3$ 、コンコルドは  $AR = 1.8$  である。耐空性能が非常に良いグライダーは、ASW-19B では、 $AR = 20.4$  である。(了)

(参考2) 上記で述べたものは主翼に関するものであるが、尾翼 (tail) は通常アスペクト比は小さい。その理由として、翼のアスペクト比が小さいほど失速迎角が大きくなり、機体がある程度傾いても、尾翼は有効性を保つ (生きている) からである。その結果、主翼が失速していても、尾翼により航空機を制御できる。(了)

また、平均翼弦長 (mean chord) は

$$\bar{c} = \frac{b}{AR} \quad (8.3)$$

となる。

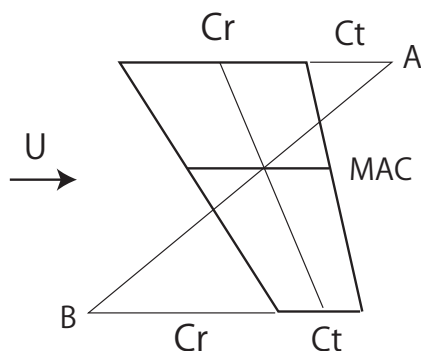


図 8.2: 平均空力翼弦 (MAC)

平均空力翼弦 飛行機の設計では、平均空力翼弦という言葉がよく使われる。平均空力翼弦 (MAC: Mean Aerodynamic Chord) は、図的に求められる (第 8.2 図参照)。求め方は、翼根翼弦 (*rootchord*:  $C_r$ ) の後縁に翼端翼弦 (*tipchord*) の長さ ( $C_t$ ) を下流方向に加えた点を A とし、翼端前縁に上流方向に翼根翼弦長を加えた点を B とする。直線 AB と、元の翼の中線 (翼根翼弦長の midpoint と翼端の midpoint を結んだ線) の交点を C とする。この点 C での局所翼弦長が平均空力翼弦 (MAC) である。なお、B747 では、 $MAC=8.3\text{m}$  である。飛行機の設計は、飛行機の重心を平均空力翼弦のどこに置くかを定めることにより、安定性の観点から設計が開始される。

(注意1) 一般に、翼の揚力係数の迎角に対する傾斜角 (揚力傾斜:  $C_{L\alpha}$ ) は、アスペクト比が大きいほど大きくなる。つまり、2次元翼に近づくほど大きくなる。また、アスペクト比が小さいほど、最大揚力係数 ( $C_{Lmax}$ ) は小さくなる。さらに、これに関連して、アスペクト比が小さいほど、失速迎角は大きくなる。(了)

(注意 2) デルタ翼では、後退角が大きい場合、アスペクト比も小さくなる。しかし、この場合には、迎角を上げて行くと、前縁剥離渦 (leading edge separation vortex) が発生し、大きな渦揚力 (vortex lift) を生じる。この前縁剥離渦は、大型旅客機でも、フラップの端や、突起物などから発生しているのを見ることができる。(了)

(参考) ここでは、主翼について述べるが、飛行機では、尾翼 (tail) も大事である。尾翼は、水平尾翼 (horizontal tail) と垂直尾翼 (vertical tail) からなる。尾翼が必要なのは、安定性 (stability)、制御 (control)、トリム (trim) のためである。通常、飛行機の重心から尾翼までは距離があるので、てこの原理で、尾翼で発生する小さな力で、重心周りに大きなモーメントを発生することができる。(了)

## 8.2 プラントルの理論

有限翼理論 (finite wing theory) の最初の数学的取り扱い、Prandtl(1918) により行われた。ここでは、翼のアスペクト比が十分大きいと仮定される。

この理論を構築するためには、いくつかの項目を押さえていく必要がある。それらを以下に順番に記す。

1) 翼には循環  $\Gamma$  が作用し、その循環は翼端では 0 になる。つまり、 $\Gamma(\pm b/2) = 0$  である。揚力  $L$ 、あるいは、循環  $\Gamma$  はスパン方向 ( $y$  方向) に変化し、その分布は  $y = 0$  に関して対称である。

2) スパン方向に変化した分の循環  $\Delta\Gamma$  は、後流面に流れ出ていく。このような後流面に渦が分布しているものを曳航渦シート (trailing vortex sheet) と呼ぶ。

これに関しては、最初、英国のエンジニアであった Lanchester(1897; 1868 ~ 1946) が、スパン方向には循環は一定で、両翼端で渦糸が下流側に流れていくと考えた。これは、翼から離れたところでの解析では有効であるが、近いところでは不十分である。

そこで、trailing vortex sheet の概念が Prandtl により導入された。このシートは、実際には、翼から下流方向に離れるにつれて、シートの翼端部が巻き上がって、一つの縦渦を形成する。この渦は最後には粘性によって散逸する。

Prandtl は解析を簡単化するために、この渦の巻き上がり (rolling up) が生じないものと仮定して、理論解析した。

3) 翼自体は、多くの渦糸で置きかえる事が出来る。

ちなみに、固定渦シート (あるいは、束縛渦シート、英語では、bound vortex sheet) は、そのシートを横切って圧力差が生じる。つまり、翼の上下面で圧力差が生じる ( $\Delta p = p_u - p_l \neq 0$ )。一方、曳航渦シートの自由渦シート (free vortex sheet) は、そのシートを横切って圧力差が生じない ( $\Delta p = 0$ )。その理由は、渦線と主流との位置関係である。固定渦シートでは、渦線が主流に対して垂直であり、主流方向の速度を変化させるが、自由渦シートでは、渦線と主流が同じ方向を向き、主流に垂直方向の速度成分が自由渦シートの上面と下面でその方向が異なるようになる。ただし、速度の絶対値は同じであるため、圧力差は生じない。

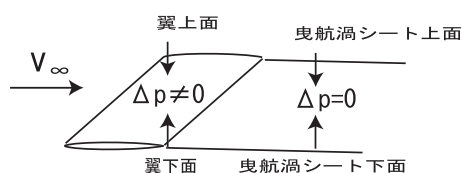


図 8.3: 固定渦シートと曳航渦シート

ここで、以下の仮定を行う。

- 仮定 1 : 渦が誘導する速度は一樣流に比べて小さい。
- 仮定 2 : 固定渦シート、自由渦シート、および、一樣流は一つの面内にある。

4) アスペクト比が大きい場合には、固定渦シートは一つの渦線で置きかえられる。つまり、アスペクト比が大きい場合には、翼巾を基準にすれば、翼弦長は非常に小さくなる。つまり、これは、一本の固定渦線 (a single bound vortex line、あるいは、lifting line) である。その循環の強さはスパン方向に変化する。プラントルは、翼の空気力を表すのにこの揚力線を用いた。これを揚力線理論 (lifting line theory) と呼ぶ。

5) 流れ場の速度は、一樣流の速度  $\vec{V}_\infty$  と渦による誘導速度  $\vec{q}$  の和として表される。 $\vec{q}$  は、 $\vec{V}_\infty$  方向の成分は誘起しないで、スパン方向か、 $\vec{V}_\infty$  と揚力線に垂直な方向の成分を誘起する。揚力線の上では、この誘導速度は下向きである。この速度を吹き降ろし速度 (downwash velocity,  $w$  あるいは  $\vec{w}$ ) と呼ぶ。本文中の添え字  $R$  は、合成速度 (resultant velocity) である。

仮定 : ここで、スパン方向に誘起される速度は、下向きに誘起される速度に比べて小さいと仮定する。

この結果、スパン方向の速度成分は無視した合成速度を  $\vec{V}_R$  で表す。この速度は揚力線に垂直である。

$$\vec{V}_R = \vec{V}_\infty + \vec{w} \quad (8.4)$$

これらの仮定は、

- 低アスペクト比の翼 (3次元性が強い)
- 翼端近く (スパン方向の速度が大きい)

では、成立しない。

一般的に、吹き降ろし速度  $w$  は、スパン方向 ( $y$  方向) に一定ではない。

$$w = w(y) \quad (8.5)$$

$$\vec{V}_R = \vec{V}_R(y) = \vec{V}_\infty - w(y)\vec{k} \quad (8.6)$$

ここで、 $\vec{k}$  は、 $z$  方向の単位ベクトルである。ちなみに、 $x$  方向は、翼弦長に沿う方向で下流側が正である。また、 $z$  方向は、翼面に垂直で翼面から上方が正である。



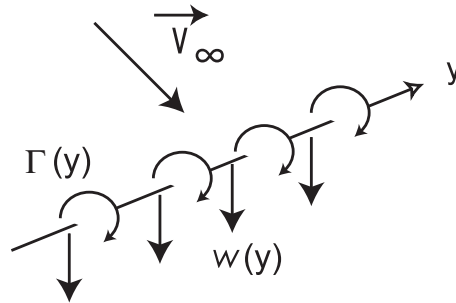


図 8.4: 吹き下ろし速度

6) スパン方向のある断面 ( $y = y$ ) で翼を輪切りにしたものを考える (厚さは  $\Delta y$ )。この輪切りしたものに対して、束縛渦の強さは  $\Gamma(y)$  で、一様流の速度  $\vec{V}_\infty$  を  $\vec{V}_R$  で置き換えた場合の 2 次元翼が作り出す空気力と同じ大きさの空気力が発生すると考える。これらの輪切りをスパン方向に足し合わせると、有限翼の場合の空気力が計算できる。これが Prandtl の基本的な考え方である。

7) 断面のスライス (薄片) を考える。厚み (スパン方向の幅) は  $dy$  である。これは 2 次元翼から計算できる。Kutta-Joukowski の定理より

$$\delta \vec{F}(y) = \rho \vec{V}_R(y) \times \vec{j} \Gamma(y) dy \quad (8.7)$$

ここで、 $\vec{j}$  は  $y$  方向の単位ベクトルである。

注意: クッタ・ジューコフスキーにより発生する揚力は、2 次元流であるので、スパン方向単位長さ当たりの力である。

この力は、 $\vec{V}_\infty$  に垂直ではなく、 $\vec{V}_R$  に垂直である。また、力の方向と大きさは、 $y$  に依存する。

8) 翼理論によれば、2 次元翼の循環は、一様流の速度と迎角に比例する。これに基づけば、ここでの循環は、

$$\Gamma(y) = K(y) V_R(y) \alpha_R(y) \quad (8.8)$$

と表すことができる。ここでは、一様流の速度は合成速度  $V_R$  で、また迎角は  $\alpha_R(y)$  で置き換えられている。この迎角は、 $y = y$  での  $\vec{V}_R(y)$  と零揚力線 (zero lift line) とのなす角度である。さらに、 $K$  は定数で、翼断面形状や大きさに依存する。

翼理論から

$$K(y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{dC_L}{d\alpha_R}(y) \right] c(y) = \frac{1}{2} a_0(y) c(y) \quad (8.9)$$

となる。ここで、 $c(y)$  は翼弦長 (chord length)、 $a_0(y)$  は揚力傾斜 (lift slope) である。

注意: 平板の場合、循環  $\Gamma$  は、

$$\Gamma = -4\pi U a \sin \alpha \sim -\pi U c \alpha = -\frac{1}{2} 2\pi U c \alpha \quad (8.10)$$

ここで、翼弦長は  $c = 4a$  である。また、 $C_{L\alpha} = 2\pi$  であるので、

$$\Gamma = -\frac{1}{2} \frac{dC_L}{d\alpha} U c \alpha \quad (8.11)$$

となる。

9) 誘導迎角の導入。

$$\alpha_R(y) = \alpha(y) - \alpha_i(y) \quad (8.12)$$

ここで、

- $\alpha(y)$  :  $\vec{V}_\infty$  と零揚力線とのなす角度
- $\alpha_i(y)$  :  $\vec{V}_R$  と  $\vec{V}_\infty$  とのなす角度。これを誘導迎角 (induced angle of attack) と呼ぶ。

ここで、

$$\alpha_i = \tan^{-1} \frac{w(y)}{V_\infty} \quad (8.13)$$

$w(y) \ll V_\infty$  の仮定より

$$\alpha_i = \frac{w(y)}{V_\infty} \quad (8.14)$$

その結果、

$$\alpha_R(y) = \alpha(y) - \frac{w(y)}{V_\infty} \quad (8.15)$$

つまり、

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} a_0(y) c(y) V_R(y) \left( \alpha - \frac{w}{V_\infty} \right) \quad (8.16)$$

これが Prandtl 理論の基本式である。

10) 次に、 $w(y)$  を循環  $\Gamma(y)$  で表す。中心軸 ( $x$  軸) から  $\eta$  だけ離れたところに渦糸 (循環の強さ  $\gamma d\eta$ ) があるとす。この渦糸が  $x$  軸から  $y$  だけ離れたところに誘起する吹き降ろし速度は

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\gamma(\eta)}{\eta - y} d\eta \quad (8.17)$$

ここで、係数が2ではなく、4で割られていることに注意。これは、本来、無限 ( $-\infty \leq x \leq \infty$ ) に伸びている渦糸に対して速度はビオ・サバルの関係式で計算されるが、ここでは、半無限 ( $0 \leq x \leq \infty$ ) の渦糸を扱っているため、半分の効果になるからである。 $\gamma(y)$  は、スパン方向単位長さ当たりの曳航渦シートの強さである。

$$\gamma(y) = -\frac{d\Gamma}{dy} \quad (8.18)$$

$\Gamma$  は  $y$  方向に減少していくので、 $d\Gamma/dy < 0$  である。式 (8.18) を式 (8.17) に代入すると、

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy}(\eta) \frac{1}{y - \eta} d\eta \quad (8.19)$$

となる。 $w > 0$  は、 $z$  軸の負の方向に誘起される速度である。この  $w(y)$  は  $\Gamma(y)$  が分かるまで得られない。また、 $\Gamma(y)$  は、 $w(y)$  が分からないと、あるいは、式 (8.15) より、 $\alpha_R(y)$  が分からないと計算できない。

11) そこで、式 (8.8) (8.15) (8.19) より、

$$\Gamma(y) = K(y) V_R(y) \left[ \alpha(y) - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y)}{dy}(\eta) \frac{1}{y - \eta} d\eta \right] \quad (8.20)$$

ここで、 $w(y) \ll V_\infty$  より、 $V_R \simeq V_\infty$  と近似できる。その結果、

$$\Gamma(y) \simeq K(y) \left[ V_\infty \alpha(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} (\eta) \frac{1}{y-\eta} d\eta \right] \quad (8.21)$$

となる。ただし、式(8.9)より、

$$K(y) = \frac{1}{2} a_0(y) C(y) \quad (8.22)$$

式(8.21)は、 $\Gamma(y)$  に対する微積分方程式となり、Prandtlの有限翼に対する方程式である。つまり、この式を解くことによって、翼のスパン方向の循環分布  $\Gamma(y)$  が得られる。ただし、翼の情報として、翼弦長  $\Gamma(y)$  と揚力傾斜  $a_0(y)$  を与え、またある迎角  $\alpha$  (スパン方向に同じではなく、変化して良い。つまり翼の捻じりも考慮できる) に対して、 $\Gamma$  の分布を求めることができる。

これを解くときの条件は、両翼端で循環  $\Gamma$  が 0 である。

$$\Gamma\left(-\frac{b}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{b}{2}\right) = 0 \quad (8.23)$$

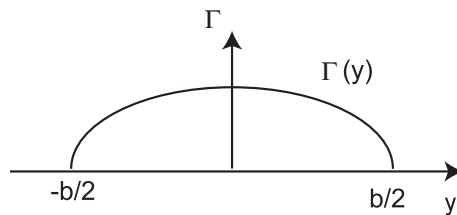


図 8.5: 循環分布

### 8.3 空気力及び空力係数

空気力 (aerodynamic force) として、縦 3 分力がある。これは、揚力、抗力、ピッチングモーメントである。揚力 (Lift) と抗力 (Drag) の定義は以下の通りである。

- 揚力  $L$  は、一様流  $V_\infty$  およびスパン方向 ( $y$  方向) に垂直である。
- 抗力  $D$  は、一様流  $V_\infty$  の方向の成分である。

空気力はクッタ・ジューコフスキの定理 (第 5 章) より一様流に垂直に発生する。ここで注意すべきことは、この場合の一様流は、downwash で下側に曲げられた後の流れである  $V_R$  である。従って、空気力  $F$  は  $V_R$  に垂直に働くことになる。これにより、抗力  $D_i$  (induced drag) が発生することになる。

(参考) 式 (8.19) から分かるように循環分布のスパン方向変化が大きい場所では downwash への寄与が増大する。翼端付近では循環分布の勾配が大きくなる。この対策として、最近では winglet を使用している機体が多い。例えば最近のボーイング 737 では、新しく作られた機体の約 85% が winglet

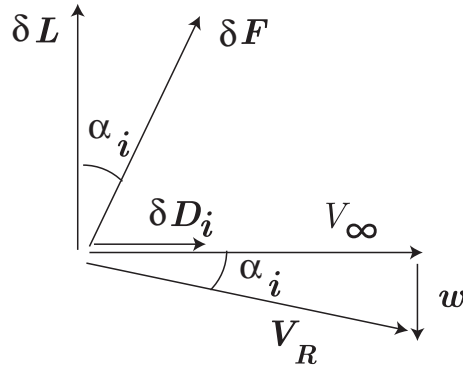


図 8.6: 誘導抗力の生成

を付けている。これにより、エンジンの燃料消費が約 5 ~ 7% 改善されると言われている。  
(参考終わり)

### 8.3.1 揚力および抗力

翼の薄片  $\delta y$  に掛かる力は、

$$\delta L(y) = \delta F(y) \cos \alpha_i \simeq \delta F(y) \quad (8.24)$$

$$\delta D_i(y) = \delta F(y) \sin \alpha_i \simeq \delta F(y) \alpha_i(y) \simeq \alpha_i \delta L(y) \quad (8.25)$$

となる。ただし、迎角  $\alpha_i$  は小さいとして、 $\cos \alpha_i \simeq 1$ 、 $\sin \alpha_i \simeq \alpha_i$  を使用している。

2次元の関係式より、つまり、式(8.7)を使って、

$$\delta L(y) \simeq \delta F(y) = \rho V_R \Gamma dy \simeq \rho V_\infty \Gamma dy \quad (8.26)$$

$$\delta D_i(y) = \alpha_i \delta L = \rho V_\infty \alpha_i \Gamma dy = \rho w \Gamma dy \quad (8.27)$$

となる。

これをスパン方向に積分して、有限翼全体に作用する空気力が計算できる。

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (8.28)$$

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} \alpha_i(y) \delta L(y) = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \alpha_i(y) \Gamma(y) dy = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w(y) \Gamma(y) dy \quad (8.29)$$

つまり、スパン方向の循環分布  $\Gamma(y)$  が分かれば、 $L$  および  $D$  は計算できる。ここで、大事なことは、2次元翼の場合と違って、抵抗が0でないということである。

この抵抗は揚力を得るために発生する抵抗で、誘導抵抗 (induced drag) と呼ばれる。この抵抗に打ち勝つためになされた仕事は、downwash の運動エネルギーに変換される。等価的には、後曳き渦を作り出すための仕事とも見なせる。

### 8.3.2 モーメント

翼に掛かるモーメントは、

$$\vec{M} = \int_{-b/2}^{b/2} y \vec{j} \times (\vec{i} \delta D_i + \vec{k} \delta L) = -\vec{k} \int_{-b/2}^{b/2} y \delta D_i + \vec{i} \int_{-b/2}^{b/2} y \delta L \quad (8.30)$$

$x$  軸の負の方向のモーメント成分を回転 (横揺れ) モーメント (rolling moment) と呼ぶ。

$$M_R = - \int_{-b/2}^{b/2} y \delta L = -\rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) y dy \quad (8.31)$$

$z$  軸の負の方向のモーメント成分を偏揺れモーメント (yawing moment) と呼ぶ。

$$M_y = \int_{-b/2}^{b/2} y \delta D_i = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w(y) \Gamma(y) y dy \quad (8.32)$$

つまり、スパン方向の循環分布  $\Gamma(y)$  が分かれば、ローリングモーメント  $M_R$  およびヨーイングモーメント  $M_y$  が計算可能となる。例えば、バンクをつけるために、左翼の補助翼を下げた場合、左翼の循環は大きくなり、その結果、式 (8.31) より、 $M_R > 0$  となり、進行方向に対して時計方向に回転する (右翼下げ)。その一方で、左翼の誘導抗力は大きくなり、式 (8.32) より、頭を左に振るようになる。これはアドバースヨーの現象である。ライト兄弟はこの現象に困り、これを回避するために、垂直安定板と方向舵が必要であると考えた。

参考 (座標系): 航空機や宇宙機の空力や運動を取り扱うときに重要になるのが座標系である。一つの座標系は、機体軸座標系 (body axis coordinates) と呼ばれ、機体に固定された座標系  $(x, y, z)$  である。 $x$  は縦軸 (longitudinal axis) で、胴体中心軸に一致し、尾部から機首側が正となる (風洞試験では、慣例として、機首から尾部側を正とするので注意)。 $y$  軸は横軸 (lateral axis) で、主翼のスパン方向で、左翼から右翼の方向が正となる。 $z$  軸は垂直軸 (vertical axis) で、右手系で考えれば、 $x-y$  平面に垂直で下向きである。この機体軸の各軸まわりにモーメントが定義され、 $x$  軸周りのモーメントはロールモーメント、 $y$  軸周りのモーメントをピッチングモーメント (pitching moment)、 $z$  軸周りのモーメントをヨーイングモーメントと呼ぶ。

もう一つの座標系は、風軸座標系 (wind axis coordinates)  $(x_w, y_w, z_w)$  である。 $x_w$  は胴体中心軸ではなく、風の来る方向に一致させる。また、 $z_w$  軸は胴体中心軸を含む対称面内に定義される。 $y_w$  軸は、 $x_w - z_w$  平面に垂直な方向である。空力で扱う揚力や抗力の概念は、この風軸座標に基づいていると考えてもよい。

## 8.4 循環が楕円分布の場合

これは、誘導抵抗が最小になる場合である。 $\Gamma(y)$  がスパン方向に以下のように与えられている場合を考える。

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - (2y/b)^2} \quad \text{or} \quad \frac{\Gamma^2(y)}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1 \quad (8.33)$$

吹き降ろし速度  $w$  は、式 (8.19) に代入して、

$$w(y) = -\frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ 1 - \left( \frac{2\eta}{b} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\eta}{y - \eta} d\eta \quad (8.34)$$

となる。

この積分は、 $\eta = y$  のとき特異性 (singular) をもつ。この場合には、主値積分である。これを計算するために、以下の座標変換を行う。

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta, \quad \eta = \frac{b}{2} \cos \phi \quad (8.35)$$

ここで、 $-b/2 \leq y \leq b/2$  は、 $\theta = \pi \rightarrow 0$  である。これを式 (8.34) に代入すると、

$$w(\theta) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos \phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\phi \quad (8.36)$$

この積分は公式 (7.107) より、 $-\pi$  となる。したがって、吹き降ろし速度  $w$  は

$$w(y) = \frac{\Gamma_0}{2b} = \text{const.} \quad (8.37)$$

つまり、

- 楕円分布の循環では、downwash はスパン方向に一定である。
- したがって、「誘導迎角  $\alpha_i$  はスパン方向に一定である。」

吹き下ろし速度  $w$  はスパン方向に一定であるから、誘導抗力のスパン方向分布は楕円分布になる。式 (8.27) より

$$\delta D_i(y) = \rho w(y) \Gamma(y) dy = \frac{\rho \Gamma_0}{2b} \Gamma(y) \delta y \quad (8.38)$$

従って、翼全体の誘導抗力  $D_i$  は

$$D_i = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w(y) \Gamma(y) dy = \frac{\rho \Gamma_0}{2b} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (8.39)$$

翼全体の揚力  $L$  は、薄片に対するクッタ・ジューコフスキーの定理をスパン方向に積分して得られる。

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (8.40)$$

これを式 (8.39) に代入すると、

$$D_i = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty} L \quad (8.41)$$

となる。ちなみに、この係数は、 $\alpha_i = w/V_\infty$  であるので、

$$D_i = \alpha_i L \quad (8.42)$$

とも書くことができる。

また、循環の楕円分布を積分すると

$$\int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{\pi b \Gamma_0}{4} \quad (8.43)$$

であるので、これを用いると、式 (8.40) は、

$$L = \frac{\pi}{4} \rho V_\infty \Gamma_0 b \quad (8.44)$$

となる。従って、これを使うと、式 (8.41) は、

$$D_i = \frac{L^2}{(\pi/2) \rho V_\infty^2 b^2} \quad (8.45)$$

となる。

以上まとめると、揚力  $L$  および誘導抗力  $D_i$  は

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma dy = \frac{\pi}{4} \rho V_\infty \Gamma_0 b \quad (8.46)$$

$$D_i = \frac{w}{V_\infty} L = \frac{\Gamma_0}{2b} \frac{L}{V_\infty} = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 \quad (8.47)$$

となる。

空力係数として、揚力係数および抗力係数は

$$C_L = \frac{L}{(1/2) \rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi b \Gamma_0}{2 S V_\infty} \quad (8.48)$$

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{(1/2) \rho V_\infty^2 S} = \frac{\pi}{4S} \left( \frac{\Gamma_0}{V_\infty} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \frac{S}{b^2} C_L^2 = \frac{1}{\pi} \frac{C_L^2}{AR} \quad (8.49)$$

となる。ここで、アスペクト比  $AR = b^2/S$  の関係が使われている。 $S$  は翼面積 (plan form area of wing) である。アスペクト比が大きくなればなるほど、誘導抵抗は小さくなる。実機のアスペクト比は、大型機では、B747 が 7、B52 が 8.6 である。軽飛行機のセスナでは、7 程度である。一方、グライダーのアスペクト比は大きく、20 程度となる。

ちなみに、 $C_L$  を縦軸に、 $C_D$  を横軸にしてプロットしたものは、極曲線 (polar diagram) と呼ばれている。

$$C_L = \sqrt{\pi AR C_{D_i}} \quad (8.50)$$

また、一般的には、航空機の抵抗は

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi e AR} \quad (8.51)$$

で表される。ここで、 $C_{D0}$  は形状抵抗で、揚力が 0 の場合の抵抗である。一方、係数  $e$  は、Oswald efficiency factor と呼ばれ、0.8 程度の値を持つ。

[注意] 少し元に戻るが、循環が楕円分布の場合の吹き下ろし速度  $w$  は、

$$w = \frac{\Gamma_0}{2b} \quad (8.52)$$

となる。また、揚力  $L$  は

$$L = \frac{\pi}{4} \rho V_{\infty} \Gamma_0 b \quad (8.53)$$

である。これらの式から  $\Gamma_0$  を消去すると、

$$w = \frac{4L}{2\pi\rho V_{\infty} b^2} \quad (8.54)$$

となる。これを使うと、吹き下ろし角は

$$\frac{w}{V_{\infty}} = \frac{4L}{2\pi\rho V_{\infty}^2 b^2} \quad (8.55)$$

となる。この右辺を変形すると

$$\frac{w}{V_{\infty}} = \frac{L}{(1/2)\rho V_{\infty}^2 S} \cdot \frac{(1/2)\rho V_{\infty}^2 S}{1} \cdot \frac{4}{2\pi\rho V_{\infty}^2 b^2} \quad (8.56)$$

となる。これを整理すると

$$\frac{w}{V_{\infty}} = C_L \frac{S}{\pi b^2} = \frac{C_L}{\pi AR} \quad (8.57)$$

となる。ここで、アスペクト比  $AR$  は、 $AR = b^2/S$  である。

(大事)： 楕円分布がなぜ抵抗最小になるか？

誘導抵抗は、一般的に、

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta dy}{y - \eta} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y - \eta} dy \quad (8.58)$$

となる。ここで、スパン方向座標  $y$  を、以下のように角度  $\theta$  を用いて表す。

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta \quad (8.59)$$

この  $\theta$  を用いて、スパン方向の循環分布を以下のように展開する。

$$\Gamma(y) = U_{\infty} b \sum_{n=1} A_n \sin n\theta \quad (8.60)$$

同様に、もう一つのスパン方向の座標  $\eta$  を  $\phi$  で表し、それを使って、 $\Gamma(\eta)$  を展開する。

$$\eta = \frac{b}{2} \cos \phi \quad (8.61)$$

$$\Gamma(\eta) = U_{\infty} b \sum_{n=1} A_n \sin n\phi \quad (8.62)$$

これらを使って、 $d\Gamma/d\eta$  を計算すると、

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = \frac{d\Gamma}{d\phi} \frac{d\phi}{d\eta} = \frac{\frac{d\Gamma}{d\phi}}{\frac{d\eta}{d\phi}} = \frac{U_{\infty} b \sum_{n=1} A_n n \cos n\phi}{(-b/2) \sin \phi} \quad (8.63)$$

となる。式 (8.59) と式 (8.61) から、

$$d\eta = (-b/2) \sin \phi d\phi, \quad dy = (-b/2) \sin \theta d\theta, \quad y - \eta = (b/2)(\cos \theta - \cos \phi) \quad (8.64)$$



となる。また、積分範囲は、以下のように変換される。

$$-b/2 \leq y \leq b/2 \rightarrow \pi \leq \theta \leq 0, \quad -b/2 \leq \eta \leq b/2 \rightarrow \pi \leq \phi \leq 0 \quad (8.65)$$

これらを、式(8.58)に代入し整理すると、

$$D_i = -\frac{\rho U_\infty^2 b^2}{4\pi} \int_0^\pi \sum_{m=1} A_m \sin m\theta \sin \theta \int_0^\pi \sum_{n=1} A_n n \frac{\cos n\phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\phi d\theta \quad (8.66)$$

となる。ここで、公式(7.107)を使う。

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\phi}{\cos \theta - \cos \phi} d\phi = (-\pi) \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (8.67)$$

これを代入し整理すると、

$$D_i = \frac{\rho U_\infty^2 b^2}{4} \sum_{n=1} n A_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta = \frac{\pi \rho U_\infty^2 b^2}{8} \sum_{n=1} n A_n^2 \quad (8.68)$$

となる。この式を見ると、 $n=1$ のときが循環が楕円分布の場合の誘導抵抗になる。式(8.33)に式(8.59)を代入すれば、

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sin \theta \quad (8.69)$$

より、 $n=1$ が楕円分布に相当する。従って、 $n \geq 2$ の項は、抵抗  $D_i$  を増やすだけに寄与している。このようにして、楕円分布のときが誘導抵抗が最小になる。

(問題) この問題を GA(Genetic Algorithm) などの最適化ツールを用いて計算し、確かに循環が楕円分布になるかを確かめよ。

## 8.5 楕円翼

式(8.21)より、循環  $\Gamma$  は

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} a_0(y) C(y) [V_\infty \alpha(y) - w(y)] \quad (8.70)$$

となる。これは、翼弦長  $C(y)$ 、翼断面形状に依存する揚力傾斜  $a_0(y)$ 、迎角  $\alpha(y)$  を  $\Gamma(y)$  と関係付けるものである。

循環  $\Gamma(y)$  が楕円分布をする場合には、上式は、

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - (2y/b)^2} = \frac{1}{2} a_0(y) C(y) \left[ V_\infty \alpha(y) - \frac{\Gamma_0}{2b} \right] \quad (8.71)$$

となる。この式は、 $a_0(y)$ 、 $C(y)$ 、 $\alpha(y)$  のいろいろな組み合わせで満足できる。

もし、スパン方向に同じ翼断面を仮定し、かつ、スパン方向に幾何学的迎角 (geometrical angle of attack) が同じであると仮定すれば、 $a_0(y)$ 、 $\alpha(y)$  をスパン方向に一定とみなすことが出来る。

その結果、式(8.71)より、 $C(y)$ を解くことが出来る。

$$C(y) = \frac{\Gamma(y)}{(1/2)a_0(y)[V_\infty\alpha(y) - (\Gamma_0/2b)]} = \frac{\Gamma_0\sqrt{1 - (2y/b)^2}}{(1/2)a_0(y)[V_\infty\alpha(y) - (\Gamma_0/2b)]} \quad (8.72)$$

この式の分母は一定であるので、

$$C(y) = \text{const} \times \Gamma(y) \quad (8.73)$$

ここで、 $\text{const}$ は、 $\Gamma_0, V_\infty, \alpha, b, a_0$ の関数である。

つまり、楕円揚力分布を持つためには、翼が幾何学的に、かつ、空力的にスパン方向にねじれが無い(untwisted)とすれば、翼弦長 $C(y)$ のスパン方向分布は楕円形となる。これを楕円翼(elliptic wing)と呼ぶ。

楕円翼の翼平面形をもつ飛行機は、第2次世界大戦での戦闘機であるスピットファイアー(英国)やサンダーボルト(米国)などである。

楕円翼の欠点は、製作するのにコストが掛かることである。この解析がなされた数年後に、別の結果が得られた。それは、楕円翼ほど誘導抵抗は小さくないが、ねじれの無いテーパー翼がやはり誘導抵抗が小さいことが明らかになった。線形のテーパー翼の場合、テーパー比が35-40%が最適であることが、プラントルの解から得られている(英国の空気力学者: Hermann Glauert 1926)。

矩形翼では、翼のスパン方向に沿う循環分布(揚力分布あるいは荷重分布)は、よりフラットとなり、翼端付近で0に落ちる。一方、テーパー翼では、中心付近で相対的により大きな値をとり、翼端に向かって線形的に減少する。

## 8.6 後流解析

模型から下流方向にある距離離れた場所( $x = x_w$ )で、主流方向( $x$ 方向)に垂直な断面(後流面:  $y-z$ 平面)での諸量を計測するか、あるいは数値シミュレーション結果を用いて、模型に発生する揚力 $L$ や抗力 $D$ を求めることが出来る。

これに関する詳細は、K.Kusunoseの本を参照されたい。

### 参考文献

K.Kusunose: A Wake Integration Method for Airplane Drag Prediction, Tohoku University Press, 2005.



図 8.7: 平均空力翼弦 (MAC)

## 8.6.1 揚力

揚力  $L$  は、後流面での積分として、以下の式で求めることができる。

$$L = \rho_{\infty} U_{\infty} \iint_w y \xi dy dz - \rho_{\infty} U_{\infty}^2 (1 - M_{\infty}^2) \iint_w \frac{w}{U_{\infty}} \frac{\Delta u}{U_{\infty}} dy dz \quad (8.74)$$

$$+ M_{\infty}^2 \frac{\gamma P_{\infty}}{R} \iint_w \frac{w}{U_{\infty}} \Delta s dy dz - \rho_{\infty} M_{\infty}^2 \iint_w \frac{w}{U_{\infty}} \Delta H dy dz + O(\Delta^3) \quad (8.75)$$

ここで、 $\rho_{\infty}$ ,  $U_{\infty}$  は一様流の密度と速度である。また、 $y$  はスパン方向の位置、 $\xi$  は主流方向 ( $x$  方向) の渦度 ( $\xi = \partial w / \partial y - \partial v / \partial z$ )、 $\Delta u = U - U_{\infty}$ 、 $w$  は鉛直方向速度 (下流面では通常負)、 $\Delta s$  はエントロピー変化、 $\Delta H$  は全エンタルピー変化である。非圧縮性流の場合には、この式は、

$$L = \rho_{\infty} U_{\infty} \iint_w y \xi dy dz - \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \iint_w \frac{w}{U_{\infty}} \frac{\Delta u}{U_{\infty}} dy dz + O(\Delta^3) \quad (8.76)$$

となる。

(注意) エントロピーは、流れが衝撃波を通過したり、渦存が存在すると、その値が変化する。

## 8.6.2 抗力

抗力  $D$  は、模型の下流での、主流に垂直な面 ( $y-z$  平面) において、以下の式より求められる。

$$D = \iint_w P_{\infty} \frac{\Delta s}{R} dy dz + \iint_w \frac{\rho_{\infty}}{2} \psi \xi dy dz - \iint_w \frac{P_{\infty}}{2} \left( \frac{\Delta s}{R} \right)^2 \psi \xi dy dz \quad (8.77)$$

ここで、 $\psi$  は、以下の式より計算される。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\xi \quad (8.78)$$

ここで、 $\xi$  は、 $x$  方向 (主流方向) の渦度成分である。渦度は、 $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$  より求められる。

抗力の式 (8.77) の、第 1 項は形状抵抗 (profile drag)、第 2 項は誘導抵抗 (induced drag)、第 3 項はエントロピー補正項である。