

粘性流体力学

Viscous Fluid Dynamics

中 村 佳 朗
Yoshiaki NAKAMURA

中部大学 教授
名古屋大学 名誉教授
Professor of Chubu University
Emeritus Professor of Nagoya University

2014年9月
September 1, 2014

序言 (Preface)

粘性流体力学は、実際の流れを扱うという意味において大変重要な学問分野である。本研究室のテキストの一つである「非圧縮性流体力学」では、粘性のないポテンシャル流 (potential flow) の基礎について述べられている。そこでは、ラプラス方程式を解くことにより速度ポテンシャルが得られ、それを微分することにより流れの速度が計算される。このようにして流れ場中での速度分布、つまり速度場が得られる。また、流れの速度と圧力の間の関係を表すベルヌーイの式を使うことにより、流れ場中での圧力分布を知ることができる。つまり、圧力場が得られる。このようにして、流れ場中の基本的諸量の分布が明らかになる。

これに対して、本テキスト「粘性流体力学」では、粘性のある流れについて述べられている。この内容は粘性流体力学と呼ばれる。流体の持つ固有の性質である粘性 (viscosity) により、流れが物体表面に付着する現象が起こる。つまり、物体まわりの流れは、物体からある程度離れた所では、ポテンシャル流であるが、物体表面付近ではポテンシャル流とは異なる流れ場となる (ただし、円管内のような内部流では、拡散現象が閉じ込められるため、流れ場全体に粘性が効いてくる)。流れ場中で物体が静止している場合には、粘性により物体表面で流れの速度は 0 となるため、物体表面付近の速度分布がポテンシャル流の速度分布とは異なってくる。つまり、物体表面付近で、物体から垂直方向の速度分布が歪み、渦度 (vorticity) が発生する。この層が境界層 (boundary layer) である。境界層内では粘性によるせん断応力 (shearing stress) が発生し、これが物体表面では摩擦応力 (frictional stress) となる。これをすべての表面で足し合わせると摩擦抵抗 (frictional drag) となる。また、粘性があることにより流れが物体表面から剥離する。さらに、渦度分布の不安定性により、小さな擾乱が成長し、層流 (laminar flow) から乱流 (turbulent flow) へ流れが遷移する。

剥離 (separation) が起きたり、乱流になると、物体に作用する抵抗が増大する。このような粘性を考慮した流れを考えると、支配方程式として、ナビエ・ストークス (Navier-Stokes) の方程式を解く必要がある。ナビエ・ストークス方程式は非線形であり、解析的に解くのが困難である。そのため、最近ではコンピュータを使って数値的に解かれている。これは数値流体力学 (CFD: Computational Fluid Dynamics) と呼ばれる。

粘性が考慮された流れを支配するパラメータは、レイノルズ数 (Reynolds number) である。レイノルズ数が小さい場合は、流れは層流で、大きくなると乱流になる。乱流の特徴は、その変動成分がいろいろなスケールからできていることである。いろいろなサイズの乱流渦 (eddy) が存在すると考えても良い。乱流はその本質的挙動を明らかにするために活発に研究されているが、数値解析も含めてその解析は容易ではない。一方、工学分野では、乱流の流れ場を解くための実用的な手法が必要となる。これが乱流モデル (turbulence model) である。乱流モデルでは、層流の場合の分子粘性に類似させた形で、乱流粘性 (eddy viscosity) を導入して、モデル化がなされている。

粘性流体力学を勉強すると実際の流れがよく理解できる。また、実際問題への応用も可能となる。航空宇宙工学では、航空宇宙機の粘性抵抗減少は運用面から重要な課題である。最近では、環境的な面から自動車も抵抗低減が求められている。航空機のみならずロケットや宇宙機も大気圏を飛行するときには空気力の影響を大いに被る (場合により大気を利用する)。

目次

第 1 章	粘性流体基礎	1
1.1	粘性	1
1.2	粘性応力	4
1.3	速度分布の歪み率	6
1.4	ナビエ・ストークス方程式	8
1.5	検査体積に基づく保存方程式	19
1.6	ベクトル表示での支配方程式	23
1.7	円柱座標での支配方程式	25
1.8	球座標での運動方程式	31
第 2 章	ナビエ・ストークス方程式の解	33
2.1	チャンネル流れ	33
2.2	渦糸の減衰	39
2.3	突然動き出す平板による流れ	46
2.4	二次元澱点流れ	50
第 3 章	境界層理論	57
3.1	境界層とは	57
3.2	支配方程式	59
3.3	平板境界層	64
3.4	境界層厚さ	68
3.5	摩擦力	72
3.6	境界層の剥離	76
3.7	空力係数	81
第 4 章	熱を含む流れ	91
4.1	各エネルギー	91
4.2	エネルギー方程式	92
4.3	熱力学特性量	95
4.4	自然対流	99
第 5 章	乱流	105
5.1	乱流における見掛けの力	107
5.2	乱流に対する支配方程式（非圧縮性の場合）	110
5.3	境界層近似による乱流の方程式	112
5.4	乱流モデルによる理論的仮定	112
5.5	壁面近くでの乱流の構造	117
5.6	乱流モデル	119

5.7 乱流流れ場の相似性	123
5.8 不安定	124

第1章 粘性流体基礎

1.1 粘性

粘性流体の特徴は、流体が粘性 (viscosity) という各流体に固有の特性を持つことである。それは、粘性を考慮しないポテンシャル流 (potential flow) と明らかに異なっている。粘性流では、

- 流体中にせん断応力 (shearing stress) が発生する。
- 物体が静止している場合、物体表面で流体の速度が 0 となる。物体が運動している場合には、物体表面での流体速度は、物体が剛体であれば物体の運動速度と同じになるし、物体が変形するものであれば物体表面の局所速度と同じになる。

ちなみに、流体の支配方程式 (governing equation) は簡単な順に以下のように分類される。

- ポテンシャル方程式 (potential equation; 渦度が存在しない)
- オイラー方程式 (Euler equation; 渦度はあるが、粘性がない)
- ナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equation; 渦度も粘性も存在する)

このテキストでは粘性流を扱っているので、その支配方程式はナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equation) である。これに関する詳細は後述する。ちなみに、大気の上空で圧力が非常に低い場合や、非常に微小な領域の流れを扱う場合には、連続体 (continuum fluid) の近似が出来なくなり、その場合には、速度分布関数を用いたボルツマン方程式 (Boltzmann equation) を解くことになる。この流れを希薄流 (Rarefied gas flow) と呼ぶ。

(参考)

粘性があると壁での流体の速度は 0 になる (物体が静止している場合) が、これには、分子の壁での反射が関係している。分子の壁での反射として、大きく分けて 2 種類ある。

- 鏡面反射 (specular reflection): この場合、分子は壁での反射前後で、壁に沿う方向 (tangential direction to the wall surface) に運動量は変化しないので、壁にはせん断力が発生しない。
- 拡散反射 (diffuse reflection): この場合、壁に向かって来た分子は、壁に衝突した後、あらゆる方向に進む可能性を持っている。従って、平均すれば、壁に沿う方向の速度は 0 になる。その結果、壁に沿う方向の流体要素の運動量が変化するので、その反作用として、壁では摩擦応力が発生する。

(了)

1.1.1 ニュートン・ストークス (Newton-Stokes) の法則

ニュートン流体 (Newtonian fluid; 線形粘性流体) では、せん断応力 (τ) は速度の歪み率に比例する。一番簡単な関係式は

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1)$$

である。ここで、 u は x 方向速度成分で、 $\partial u / \partial y$ は速度の歪み率 (strain rate) である。ちなみに、この式に従わない流体を非ニュートン流体 (Non-Newtonian fluid) と言い、例えば、粘土、アスファルト、合成樹脂、ゴムなどが相当する。

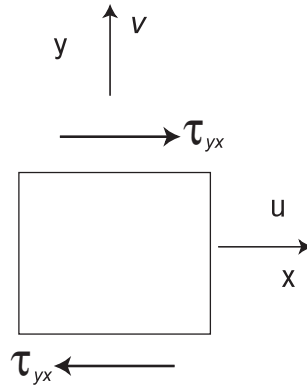


図 1.1: 各面に平行に作用するせん断応力

1.1.2 粘性係数 (molecular viscosity) μ

粘性係数は変形のしにくさを表す尺度で、油 (oil) は大きな値を持つ。一方、気体分子運動論 (gas dynamics theory) では、お互いに行き来する分子の運動量の交換に関する統計的平均量として求められる。粘性係数 μ は、ストークス (1845; George Gabriel Stokes) によって導入された。粘性係数の次元は以下のようなものである。

$$[\mu] = [\tau] / [\partial u / \partial y] = \left[\frac{kg \cdot m / sec^2}{m^2} \right] / \left[\frac{m / sec}{m} \right] = kg / (m \cdot sec)$$

また、粘性係数の単位として、

- 国際単位系 (SI) : $N \cdot sec / m^2$ 、あるいは $Pa \cdot sec$ (Pa :パスカル); 10 poise に等しい
- CGS 単位系 : poise (ポアズ)(= $g / cm \cdot sec$)

の2つがある。粘性係数は、気体では温度の関数で、温度が上昇すると増加し、液体の場合は温度と圧力の関数で、温度が上昇すると減少する。気体と液体では性質が反対であることに注意したい。

参考のために、油、水、空気の粘性係数のおおよその値はそれぞれ以下ようになる。油に比べれば、水は3オーダー小さく、水に比べれば、空気は、2オーダー小さい。

	粘性係数 (μ): $kg / (m \cdot sec)$
油	0.8004
水	1.0×10^{-3}
空気	1.8×10^{-5}

1.1.3 粘性係数のモデル化

ナビエ・ストークス方程式を解くためには、各流体に固有の粘性係数 μ を与える必要がある。非圧縮性流体では、流れ場の中で粘性係数の値はほとんど変わらないと近似でき、一定値を使う。圧縮性流の場合には、流れ場の中の場所場所で温度が変化するので、温度の関数である粘性係数も空間的に分布する。この場合、粘性係数を温度の関数として具体的に与える必要がある。気体の粘性係数を近似するのに、以下のサザーランド (Sutherland; 1893 年) の式がよく使われる。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{T_0 + S}{T + S}\right) \quad (1.2)$$

この式からも分かるように、粘性係数 μ は温度 (T) の関数で、かつ、温度とともに増大する。 μ_0 および T_0 は基準状態での粘性係数および温度である。空気の場合は、 $T_0 = 273[K]$, $S = 111$, $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} [kg/(sec \cdot m)]$ である。

その他、Maxwell や Rayleigh によって導かれた、希薄なガス (dilute gas) に対する以下の近似式も使われる。これを power law の式と呼ぶ。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \quad (1.3)$$

ここで、 n は各ガスで異なる定数で、 $0.5 < n < 1$ である。空気の場合は、 $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} [kg/(sec \cdot m)]$, $T_0 = 273K$, $n = 2/3$ である。

1.1.4 動粘性係数

動粘性係数 (kinematic viscosity) とは、粘性係数 μ を密度 ρ で割ったもので、 ν で表す。

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4)$$

動粘性係数の次元 $[\nu]$ は

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{kg/(m \cdot sec)}{kg/m^3} = m^2/sec$$

である。

(参考) kinematics という言葉は、流体エレメントの変位、速度、加速度、変形、回転など、質量を含まないものに対して用いられる。(了)

動粘性係数の値は、20 において、おおよそ、

	動粘性係数 (ν): m^2/s
油	0.9×10^{-3}
水	1.0×10^{-6}
空気	1.5×10^{-5}

である。

今後の参考として、空気 (air) が持つ種々の特性量を表 1.1 に記す。ただし、温度 15 , 圧力 760mmHg の場合である。ちなみに、1 気圧は、パスカル (Pa) の単位では、 $1.01325 \times 10^5 Pa = 101.325 kPa = 0.101325 MPa (= 1013.25 hPa)$ である。ここで、熱量の単位の換算は、 $1 cal = 4.18605 J$ である。また、比熱比 (ratio of specific heat) は、圧縮性流体では大事なパラメータである。

一方、水 (water) の場合の特性量を、表 1.2 に示す。

表 1.1: 空気の特性質

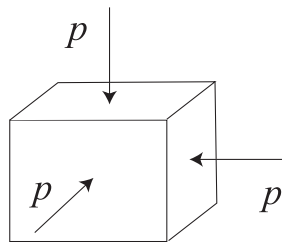
密度	ρ	1.219 kg/m^3
粘性係数	μ	$1.788 \times 10^{-5} \text{ kg/s} \cdot \text{m}$
動粘性係数	ν	$1.467 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
熱伝導率	k	$5.76 \times 10^{-6} \text{ kcal/s} \cdot \text{m} \cdot \text{K} = 2.42 \times 10^{-5} \text{ kJ/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{K)}$
定圧比熱	C_p	$0.23990 \text{ kcal/(kg} \cdot \text{K)} = 1.004 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$
定容比熱 (等積比熱)	C_v	$0.17100 \text{ kcal/(kg} \cdot \text{K)} = 0.716 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$
比熱比	$\gamma = C_p/C_v$	1.4

表 1.2: 水の特性質

密度	ρ	999.6 kg/m^3
粘性係数	μ	$1.0 \times 10^{-3} \text{ kg/s} \cdot \text{m}$
動粘性係数	ν	$1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
熱伝導率	k	$0.610 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{K)} = 0.610 \text{ W/m} \cdot \text{K} = 6.10 \times 10^{-4} \text{ kJ/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{K)}$
定圧比熱	C_p	$4.182 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$
定容比熱 (等積比熱)	C_v	* $\text{kcal/(kg} \cdot \text{K)}$
比熱比	$\gamma = C_p/C_v$	1.

1.2 粘性応力

流体に作用する応力 (stress) σ_{ij} を考える。ここで、添え字 i, j は、 $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ と変化し、それぞれ、 x, y, z に対応する。応力 σ_{ij} は、2つの成分からなる。ひとつは圧力 (pressure) p で、もうひとつは粘性応力 (viscous stress) τ_{ij} である。圧力 p は等方性 (isotropy) である。つまり、圧力が掛かる面の方向に依存しない。また、圧力は周りから受ける力であるので、マイナスの符号が付くことに注意すること。

図 1.2: 流体エレメントが運動していない場合は各面に同じ大きさの圧力 p が作用する

これらの2種類の成分を考慮して、流体中に発生する応力を行列の形で書くと、応力テンソルは、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

となる。

(参考) テンソルは、一般に n 次のテンソル (a tensor of order n) と呼ばれる。その成分の数は、 3^n 個である。従って、0 次のテンソルは成分の数が $3^0 = 1$ 個で、これはスカラー (scalar) に相当する。1 次のテンソルは成分が $3^1 = 3$ 個で、これはベクトルを表わす。ここでの応力テンソルは 2 次のテンソルで、式 (1.5) から分かるように、成分は 9 個ある。(了)

粘性応力と速度の歪み率との間の関係を表す ニュートン・ストークスの法則 は、一般に以下のように記述される。

$$\tau_{ij} = \lambda \cdot \text{div } \vec{u} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

ここで、 λ は粘性係数の一種で、後ほど決定される。また、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタで、以下のように定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.7)$$

この関係式を使えば、粘性応力 τ_{ij} は速度成分 (u_1, u_2, u_3) で表すことができる。ただし、 (u_1, u_2, u_3) は、3次元座標 (x_1, x_2, x_3) の各座標方向の速度成分で、 (x_1, x_2, x_3) はデカルト座標 (x, y, z) に対応する。つまり、 $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ である。従って、 $\tau_{11} = \tau_{xx}$, $\tau_{12} = \tau_{xy}, \dots$ となる。このような添え字の数字を変えるだけで各変数を表わせることができる方法はメリットがあり、コンピュータのプログラムに乗せることができる。この式を書き下すと、粘性応力テンソルの各成分は、

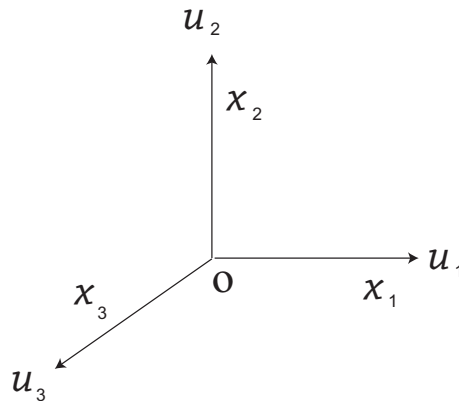


図 1.3: 座標 (x_1, x_2, x_3) と速度成分 (u_1, u_2, u_3)

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \text{div } \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \lambda \cdot \text{div } \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \lambda \cdot \text{div } \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

となる。

式 (1.6) は、後述する速度分布の歪み率 (strain rate) S_{ij} を使えば

$$\tau_{ij} = \lambda \cdot \text{div } \vec{u} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot S_{ij} \quad (1.9)$$

となる。ここで、 S_{ij} は

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10)$$

である。

粘性応力テンソルの対角成分の和を取ると (数学では対角成分の和を trace と呼ぶ)

$$\Sigma \tau_{ii} = 3\lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \Sigma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \vec{u}$$

となる。通常の場合、この値が0になるように、係数 λ が決定される。つまり、応力の3方向 (x, y, z 方向) の平均値は圧力に組み込んでしまうという考え方である。この平均値は

$$\frac{\Sigma \tau_{ij}}{3} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{u}$$

となり、ここで、 $\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)$ は、体積粘性率 (bulk viscosity) と呼ばれる。通常の流体では体積粘性率は小さく、これを0におく。その結果、

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.11)$$

となり、これは Stokes の仮説 (Stokes' hypothesis) と呼ばれる。

1.3 速度分布の歪み率

流れ場中の速度分布、つまり、速度場は、通常、速度が空間中に一様に分布しているのではなく、任意に分布している。また、流体の要素は移動する間に、加速度運動したり、変形したりする。ちなみに、空間に一様に分布することを英語では、homogeneous と言う。

1.3.1 流体要素の運動

流体要素は、流れ場中で、以下の5つの運動や変形を行う。

- 1 並進 (translation)
- 2 回転 (rotation)
- 3 伸びあるいは縮み (extensional strain)
- 4 せん断歪み (shear strain)
- 5 膨張 (dilatation)

速度分布の歪み率 S_{ij} は2次のテンソルを形成し、それは対称テンソルである。つまり、 $S_{xy} = S_{yx}$ などである。

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

また、上述したように、 S_{ij} は以下のように定義される。

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.13)$$

ちなみに、速度歪みテンソル S_{ij} と同様に、渦度テンソル Ω_{ij} が以下のように定義できる。

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

この渦度テンソルは、

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \quad (1.15)$$

であるので、交代テンソル (antisymmetric tensor) である。また、対角成分 (diagonal elements) は 0 になる。

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0 \quad (1.16)$$

1.3.2 軸方向の伸び縮みに関する歪み率

ある面に垂直方向に押したり、引いたりしたときに生じる、その方向の速度分布の歪みは、

$$\underbrace{S_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}}_{x \text{ 方向の伸び縮み}}, \quad \underbrace{S_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}}_{y \text{ 方向の伸び縮み}}, \quad \underbrace{S_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}}_{z \text{ 方向の伸び縮み}} \quad (1.17)$$

である。

ちなみに、非圧縮性流体では体積膨張 (体積変化) が起こらないので、

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.18)$$

である。ゆえに、式 (1.17) の各方向の歪みをすべて加えたものは 0 になる。

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0 \quad (1.19)$$

となる。この左辺を dilatation と呼ぶ。つまり、

$$\text{dilatation} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.20)$$

である。つまり、非圧縮性流体では、 $\text{div } \vec{v} = 0$ である。

一方、圧縮性流体では流体要素が膨張したり、収縮したりする。それは、密度が変化することと関係している。つまり、体積が膨張すれば密度が減り、体積が収縮すれば密度が増える。例えば、圧縮性流では、速度が速くなると、密度が減少する。これは、流体要素の体積が膨張することに等しい。

1.3.3 せん断歪み率

せん断歪み率 (Shearing-strain rate) とは、ある面に沿って面を擦った時に生じる、速度分布の歪みである。これは粘性があるがために起こる歪みである。粘性が無ければ、せん断歪みは起こらない。速度分布のせん断歪みは以下ようになる。

$$S_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad S_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad S_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.21)$$

以上述べた速度分布の歪みテンソルには次の3つの不変量 (I_1, I_2, I_3) がある。不変量 (invariant) とは、座標軸 (x, y, z) の取り方を変えてもその値は変わらないことを意味している。

$$I_1 = \text{trace } S = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \quad (1.22)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{trace } S)^2 - \text{trace } S^2] = S_{xx}S_{yy} + S_{yy}S_{zz} + S_{zz}S_{xx} - S_{xy}^2 - S_{yz}^2 - S_{zx}^2 \quad (1.23)$$

$$I_3 = \det S = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

I_1 は体積膨張 (あるいは体積収縮) を表す。これらの不変量は、2階のテンソルが持つ一般的な性質で、テンソル不変量と呼ばれる。なお、歪みテンソル S は対称テンソルであり、ここではその性質が使用されている。

1.4 ナビエ・ストークス方程式

ナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equations) は、フランス人の Navier (Claude Louis Marie Henri Navier) が 1826 年 (1827 年?) に方程式を誘導した。ちなみに、Stokes (George Gabriel Stokes) の寄与は、Navier より後の 1845 年である。それぞれ独立に式を誘導したが、Navier は molecular flow として、Stokes は continuum flow として式を誘導した。

x 方向の速度成分 $u(t, x, y, z)$ は、時刻 t と位置 x, y, z の関数である。ある位置 (x, y, z)、ある時刻 t での速度 u^* を基準値として、テーラー展開し、1次の微小量まで考慮すると

$$u(t + \delta t, x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = u^* + \frac{\partial u}{\partial t} \delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \quad (1.25)$$

が得られる。この式の中の空間変位 $\delta x, \delta y, \delta z$ は、流れによる流体要素の移動 (軌跡) を考慮すれば、次のように表わすことができる。

$$\delta x = u \times \delta t, \quad \delta y = v \times \delta t, \quad \delta z = w \times \delta t \quad (1.26)$$

これが Lagrange 微分と呼ばれる理由である (Lagrange 表示とは、流れに乗ってその流れの変化を見ていくことである)。この関係式を式 (1.25) に代入すると、速度の変化は、

$$u(t + \delta t, x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = u^* + \frac{\partial u}{\partial t} \delta t + \frac{\partial u}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial u}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial u}{\partial z} w \delta t \quad (1.27)$$

として表わすことができる。

次に、速度差 $u - u^*$ を微小時間 Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ にすると、加速度が得られる。

$$\frac{Du}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u - u^*}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{非定常項}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{対流加速度項}} \quad (1.28)$$

この式で分かるように、加速度は2つの項からなる。それは、非定常項と対流加速度項である。ここで、微分演算子 D/Dt は、実質微分 (substantial derivative) と呼ばれたり、ラグランジュ微分 (Lagrange derivative) と呼ばれたりする。式 (1.28) は、流れの方程式をオイラー (Euler) 表示 (流れ場中の各位置での流体の運動を同時に見る方法) で表したときの加速度項である。

(参考) ラグランジュの方法とオイラーの方法

流体の運動を記述するのに2つの方法がある。ひとつは、ラグランジュ (Lagrange) の方法で、もうひとつは、オイラー (Euler) の方法である。

- ラグランジュの方法

初期 ($t = 0$) で流体のある要素に印を付け、時間とともにその要素がどのような運動をするかをその要素に注目して追跡していく方法である。速度成分 u は、 $u = u(\vec{X}, t)$ (ここで、 \vec{X} は $t = 0$ での流体エレメントの位置ベクトル) として記述される。つまり、初期の位置が大事なパラメータとなる。この場合には、加速度は時間で微分するだけの簡単なものとなるが (実質微分のように複雑ではなく、ただ単に du/dt でよい)、欠点として、自分の周りに存在する流体要素の決定が困難で、その結果、運動方程式の右辺の力の項 (粘性項など) が複雑になる。従って、少なくとも粘性流を扱う場合には使われない。(流れを計算する方法の一つに vortex method があるが、これは、渦度 (あるいは渦度の塊) の運動を調べて行くもので、ラグランジュ法である。)

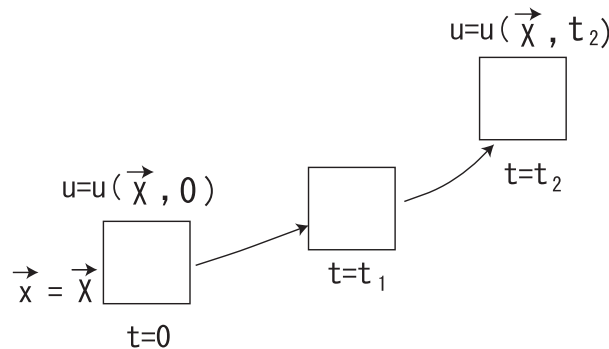


図 1.4: 流体要素のラグランジュ表示

- オイラーの方法

Lagrange の方法のようにあるひとつの流体要素を追跡していくのではなく、場全体、つまり (x, y, z) 空間を同時に見渡す方法である。もっと具体的に言うと、個々の流体よりもそれが存在している場所 (x, y, z) に重点を置く。従って、ある瞬間での速度 u は、 $u = u(\vec{x}, t)$ のように場の中での分布として表される。たとえば、密度 ρ の時間変化をオイラー表示で表すと、

$$\frac{D\rho}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{局所的な時間変化}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \text{grad } \rho}_{\text{対流による変化}} \quad (1.29)$$

となる。ここで、 $\text{grad} = \nabla$ であり、また、 \vec{v} は速度ベクトルで、 $\vec{v} = (u, v, w)$ である。ここでは、流れとともに運ばれて変化する効果が第 2 項として付加される。

(参考了)

以降、オイラー表示、つまり式 (1.28) を用いて計算される加速度を使用して、流れの運動方程式を構築する。流体の運動方程式は、ニュートンの運動に関する第 2 法則

$$ma = F \quad (\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}) \quad (1.30)$$

より、以下のように求められる。

- x 方向運動方程式

$$\rho \frac{Du}{Dt} = X + \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (1.31)$$

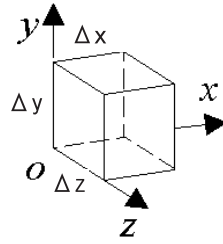


図 1.5: 流体要素

- y 方向運動方程式

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (1.32)$$

- z 方向運動方程式

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (1.33)$$

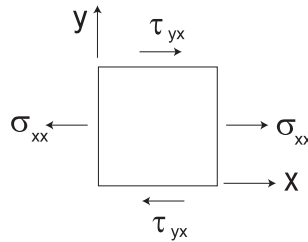


図 1.6: 各面に掛かる流体の応力

ここで、各式の左辺の ρ は流体の密度、右辺第1項の (X, Y, Z) は外力または体積力である。ここでは、単位体積の要素を考えているので、運動方程式の質量 m は密度 ρ に置き換わっている。

これらの式をまとめてコンパクトに書くと、以下ようになる。

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{X} + \nabla \cdot \bar{\sigma}} \quad (\text{non-conservative form of the dynamic equation}) \quad (1.34)$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ は応力テンソルで

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

となる。

この応力テンソルの垂直応力成分（応力テンソルの対角成分）は、圧力と粘性応力から成っている。

$$\sigma_{xx} = -p + \lambda \overbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}^{\text{div } \vec{v}} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.36)$$

$$\sigma_{yy} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.37)$$

$$\sigma_{zz} = -p + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.38)$$

である。ただし、 λ は前述したように、Stokes の仮説より、 $\lambda = -(2/3)\mu$ を採用する。

また、せん断応力は、式 (1.35) が対称テンソルであることを考慮して、

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\mu \cdot S_{xy} \quad (1.39)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 2\mu \cdot S_{yz} \quad (1.40)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2\mu \cdot S_{zx} \quad (1.41)$$

となる。

以上の応力の関係式を、各方向の運動方程式である、式 (1.31) (1.32) (1.33) の右辺に代入すると、流体の運動方程式は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{v} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{v} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{v} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.44)$$

それぞれ、 x 方向、 y 方向、 z 方向に関する、圧縮性流に対する運動方程式である。これを ナビエ・ストークス方程式と呼ぶ。

ちなみに、連続の方程式を使うと、これらの方程式を保存形にすることが出来る。例えば、式 (1.42) の左辺は、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} &\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \overbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)}^{\text{連続の式より } 0} \\ &= \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.45)$$

結局、流れの運動方程式を保存形で、ベクトルおよびテンソルを使ってコンパクトに表わすと、以下のようなになる。

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \text{div} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{X} + \text{div } \vec{\sigma}} \quad (\text{the momentum equation}) \quad (1.46)$$

ここで、 $\text{div } \vec{\sigma}$ は、テンソルの発散 (divergence) であることに注意すること。テンソルの発散を書き

下すと、各成分は以下ようになる。

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = \nabla \cdot \bar{\sigma} = (\partial_i \sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{21} + \partial_3 \sigma_{31} \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{32} \\ \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

ここで、添え字 (1, 2, 3) は、(x, y, z) に対応する。また、 ∂_i は、 x_i での微分を表わす。

一方、粘性項（粘性係数を伴った項; viscous terms）を消去した方程式を Euler 方程式と呼び、Leonhard Euler によって 1757 年発表されている。

非圧縮性流に対しては、非圧縮性流に対する連続の方程式である $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ と、 $\mu = \text{const}$ を使うと、ナビエ・ストークス方程式は、以下のように簡単化される。

$$\rho \frac{Du}{Dt} = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (1.48)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (1.49)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (1.50)$$

ここで、 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ で、デカルト座標 (x, y, z) では、

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.51)$$

である。

(問題) 式 (1.48) を誘導せよ。

(参考) ニュートンの本「PHILOSOPHIA NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (Mathematical Principles of Natural Philosophy; 自然哲学の数学的原理)」

ニュートン (Isaac Newton, 1642-1727) は、1687 年に上記の本を出版し、古典力学の基礎を確立した。Part 1 では、慣性の法則、運動の法則、作用・反作用の法則が、Part 2 では、流体力学が、Part 3 では、万有引力が論じられている。(了)

1.4.1 連続の方程式

流れている流体を分子や原子のような粒子レベルで見ないで、つまり、個々の粒子の運動を追跡しないで、それらが多数集まってできている塊を考える。このようにして流れを連続体として考えるのが流体力学が通常採用する方法である。このとき、流れは連続の方程式 (continuity equation) を満足する必要がある。

流体力学における連続の方程式は、圧縮性流体の場合、

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0} \quad (\text{the continuity equation}) \quad (1.52)$$

となる。ここで、 $\operatorname{div} = \nabla \cdot$ である。

この式を成分で書き下すと以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (1.53)$$

さらに、これを展開して2つの部分に分ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.54)$$

ベクトル表示を利用すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.55)$$

となる。あるいは、実質微分を用いて、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.56)$$

と書ける。

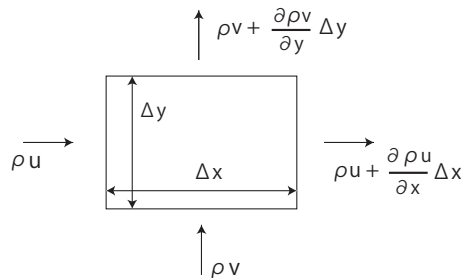


図 1.7: 流体要素の各面を通過する流量

(参考) 連続式の誘導は、2次元で考えれば、図 1.7 から、定常流の場合は、以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) \Delta y - \rho u \Delta y + \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) \Delta x - \rho v \Delta x = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

本来は、上式のすべての項に、時間刻み Δt が掛かるが、 Δt で割れば落ちてしまう。結果的には、 $\Delta t = 1$ つまり単位時間を考えたとしても差し支えない。

非定常流の場合には、流体要素の中で増加する(あるいは減少する)質量を加味する。つまり、

$$\begin{aligned} & \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) \Delta y - \rho u \Delta y + \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) \Delta x - \rho v \Delta x + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y - \rho \Delta x \Delta y = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

(参考了)

以上は圧縮性流体の場合であるが、非圧縮性流体では密度 ρ が一定であるので、連続の方程式 (1.56) は以下のように簡単化される。

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.59)$$

ちなみに、 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ の流れは、以下のことを表している。

- 2次元の場合：流体要素の面積は流れと共に不変である
- 3次元の場合：流体要素の体積は流れと共に不変である

1.4.2 状態方程式

一方、圧縮性流体の流れを解く場合に、状態方程式 (the equation of state) が必要となる。熱的完全ガス (thermally perfect gas) の状態方程式は以下ようになる。

$$\boxed{\frac{p}{\rho} = RT, \quad \text{or} \quad pv = RT} \quad (\text{the state equation}) \quad (1.60)$$

表 1.3: ガス定数

$v = 1/\rho$: 比容積 (specific volume) (単位質量当りの体積)
R	: 単位質量当たりのガス定数 $R = R_0/M$ (M :分子量)
R_0	: ガス定数 (gas constant) $R_0 = 8.3145$ [$J/(K \cdot mol)$]

ちなみに、空気の場合には、分子量が $M = 29$ で、単位質量当りのガス定数は、 $R = 287[m^2/s^2 \cdot K] = 287[J/kg \cdot K]$ となる。ここで注意することは、分子量の単位である。空気は、 $M = 29$ g/mol であるが、 kg 表示すると、 $M = 29 \times 10^{-3}$ kg/mol となる。この 10^{-3} が付くことに注意する必要がある。

また、分子1個当たりのガス定数がボルツマン定数 k_b である。つまり、ガス定数をアボガドロ数 N_b ($= 6.02 \times 10^{23}$ 個/mol) で割ったものである。

$$k_b = \frac{R_0}{N_b} = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (1.61)$$

ガス定数 R_0 は、モル数を含む状態方程式から求められる。

(参考) ガス定数について

モル数を含む状態方程式は、

$$pV = nR_0T \quad (1.62)$$

と書くことができる。ここで、 n はモル数 (the number of moles) であり、 R_0 はガス定数である。 $p = 1 \text{ atm}$ 、 $T = 0^\circ C$ のとき、1モルのガス ($n = 1$) の容積は、 $V = 22.4 \text{ l}$ となる。これを式 (1.62) に代入すると、

$$R_0 = 8.314J/(K \cdot mol) \quad (1.63)$$

が得られる。

今、ガスの体積を V 、質量を \tilde{M} とする。熱力学変数である密度 ρ を使って表わすと、

$$\rho = \frac{\tilde{M}}{V} \quad (1.64)$$

となる。これを式 (1.62) に代入すると、

$$p \frac{\tilde{M}}{\rho} = nR_0T \quad \rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{nR_0}{\tilde{M}}T \quad (1.65)$$

となる。モル数 n は、ガスの質量 \tilde{M} をガスの分子量 M (molecular weight) で割って得られる。

$$n = \frac{\tilde{M}}{M} \quad (1.66)$$

これを式 (1.65) に代入すると、

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{M}} \times \frac{R_0}{M} T \quad \rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{R_0}{M} T \quad (1.67)$$

となる。この式は、MKS 単位に基づいている。分子量 M の単位は、通常 g/mol が使われるので、これを MKS 単位 (kg) に換算すると、右辺の式は、

$$\frac{R_0}{M} \quad \rightarrow \quad \frac{R_0}{M \times 10^{-3}} \quad \rightarrow \quad \frac{R_0 \times 10^3}{M} \quad (1.68)$$

となる。式 (1.63) を代入し、単位も含めて書くと、

$$R = \frac{R_0}{M \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{J/(K \cdot mol)}{kg/mol} = \frac{8314}{M} \cdot \frac{J}{kg \cdot K} \quad (1.69)$$

となる。

1.4.3 エネルギー方程式

温度に関する情報を得るためには、エネルギー式 (energy equation) を解く必要がある。熱力学第一法則 (系に加えられた熱量は、系の内部エネルギーの増加と系が外にする仕事に使われる) より、エネルギー式は

$$\rho \frac{De_i}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\text{温度の拡散}} + \mu \Phi \quad (1.70)$$

と書くことができる (この式の誘導は後ほど示す)。ここで、 e_i は単位質量当りの内部エネルギー、 k は熱伝導係数、 Φ は散逸関数である。ちなみに、散逸とは運動エネルギーが熱エネルギーに変化することである。散逸関数は速度成分を用いて以下のように書き下される。

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.71)$$

散逸 $\mu \Phi$ は、後述の式 (1.82) から分かるように、粘性応力に歪みを掛けたものである。2次元で考えれば以下ようになる。

$$\mu \Phi = \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.72)$$

添え字 (i, j) を使って表わせば、

$$\mu \Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.73)$$

となる。3次元の場合、 $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ とすればよい。

(注意) 散逸 (dissipation) とは、粘性応力に歪みを掛けたものである。

ちなみに、座標系が何であれ (デカルト座標でも、円柱座標でも、球座標でも) 散逸エネルギーは一般に以下のように表される。

$$\mu \Phi = \mu [2(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) + (2S_{23})^2 + (2S_{31})^2 + (2S_{12})^2] + \lambda (S_{11} + S_{22} + S_{33})^2 \quad (1.74)$$

ちなみに、この S_{ij} は歪み率で、デカルト座標の場合には、式 (1.13) を代入すればよい。

式 (1.70) の誘導

式 (1.70) の誘導を以下に示す。簡単化のために2次元で考える。

x 方向の運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \quad (1.75)$$

となる。また、y 方向の運動方程式は、

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} \quad (1.76)$$

である。式 (1.75) に u を、式 (1.76) に v を掛けてそれぞれ加える。これは、機械的なエネルギーを求めるものである。

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2 + v^2}{2} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2 + v^2}{2} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \\ &= -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + u \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + v \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + v \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} \end{aligned} \quad (1.77)$$

圧縮性の連続の式に $\frac{u^2 + v^2}{2}$ を掛けると、

$$\frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0 \quad (1.78)$$

が得られる。式 (1.77) と式 (1.78) を加えると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \rho \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \rho u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \rho v \right) \\ &= -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + u \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + v \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + v \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} \end{aligned} \quad (1.79)$$

となる。

ここで、熱力学の関係、つまり、熱力学の第1法則 (the first law of thermodynamics) である

$$\delta Q = \delta e_i + p \delta v \quad (1.80)$$

を利用する (この式は単位質量当り)。これは、系に外から加えられた熱量 δQ は、内部エネルギーの増加 δe_i と外に対する仕事 $p \delta v$ (v は比容積) に使われることを意味している。

以下では単位体積当たり (per unit volume) で考える。熱量 δQ は、流体エレメントの周りからの熱伝導により流体エレメントに入り込むので、

$$\delta Q = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} \quad (1.81)$$

となる。これを式 (1.80) に代入すると

$$\begin{aligned} \underbrace{\rho \frac{De_i}{Dt}}_{\text{単位体積当たり}} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} \\ &+ (-p) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.82)$$

となる。これが、式 (1.70) の証明である。

ここで、式 (1.82) の右辺の、系の外部に対する仕事の項では、式 (1.80) の圧力 p の他に、粘性応力による仕事も加えている。これらの項を整理すると、

$$\begin{aligned}
& (-p) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= (-p + \tau_{xx}) \frac{\partial u}{\partial x} + (-p + \tau_{yy}) \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \bar{\sigma} \cdot \nabla \vec{v}
\end{aligned} \tag{1.83}$$

となる。ここで、 $\bar{\sigma}$ は、応力テンソルである。この式を使えば、式 (1.82) は以下のように簡単に記す事ができる。

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \bar{\sigma} \cdot \nabla \vec{v} \tag{1.84}$$

ここで、 \vec{q} は熱流束ベクトルである。

$$\vec{q} = -k \nabla T \tag{1.85}$$

式 (1.82) の左辺を書き下すと、

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial e_i}{\partial t} + u \frac{\partial e_i}{\partial x} + v \frac{\partial e_i}{\partial y} \right) \tag{1.86}$$

となる。

一方、連続の式に e_i を掛けると、

$$e_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + e_i \frac{\partial}{\partial x} \rho u + e_i \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0 \tag{1.87}$$

となる。これを式 (1.86) に加えると、式 (1.82) の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e_i + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u e_i) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v e_i) \tag{1.88}$$

となる。

以上より、式 (1.82) は、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \rho e_i + \frac{\partial}{\partial x} \rho u e_i + \frac{\partial}{\partial y} \rho v e_i \\
&= \text{div} (k \text{ grad } T) - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.89}$$

となる。

さらに、運動方程式から導かれた機械的なエネルギー方程式である式 (1.79) と、ここで得られた熱力学のエネルギー式 (1.89) を加えると、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{u^2 + v^2}{2} \rho + \rho e_i \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{u^2 + v^2}{2} \rho u + \rho u e_i \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{u^2 + v^2}{2} \rho v + \rho v e_i \right\} \\
&= \text{div} (k \text{ grad } T) - \frac{\partial}{\partial x} \rho u - \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial x} u \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} u \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial x} v \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} v \tau_{yy}
\end{aligned} \tag{1.90}$$

が得られる。この式をベクトルとテンソルを用いて簡潔に表記すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 + \rho e_i \right) + \text{div} \left\{ \rho \vec{u} \cdot \frac{\vec{u}^2}{2} + \rho \vec{u} e_i \right\} = \text{div} (k \text{ grad } T) - \text{div} p \vec{u} + \text{div} (\bar{\tau} \cdot \vec{u}) \tag{1.91}$$

となる。ここで、 $\bar{\tau}$ は粘性応力テンソルである。テンソル $\bar{\tau}$ とベクトル \vec{u} のスカラー積はベクトルとなり、成分で書くと以下ようになる。

$$\bar{\tau} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx}u + \tau_{xy}v \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

(参考)

一般にテンソル B とベクトル \vec{a} のスカラー積は以下のように定義される。

$$B \cdot \vec{a} = (b_{ji} a_i) = \begin{pmatrix} b_{11}a_1 + b_{12}a_2 \\ b_{21}a_1 + b_{22}a_2 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

(参考了)

式 (1.91) をさらにまとめると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 + \rho e_i \right) + \text{div} \left\{ \rho \vec{u} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + h \right) - k \text{grad } T - \bar{\tau} \cdot \vec{u} \right\} = 0 \quad (1.94)$$

となる。ここで、 h はエンタルピー (static enthalpy) で、以下のように定義される。

$$h = e_i + \frac{p}{\rho} \quad (1.95)$$

また、さらに、単位体積当たりの全エネルギー (total energy) e_t および単位質量当たりの全エンタルピー (total enthalpy) H_t を導入する。

$$e_t = \frac{1}{2} \rho \vec{u}^2 + \rho e_i, \quad H_t = \frac{\vec{u}^2}{2} + h \quad (1.96)$$

これを使うと、式 (1.94) は、以下のような簡潔な式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} e_t + \text{div} (\rho \vec{u} H_t - k \text{grad } T - \bar{\tau} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (\text{the energy equation}) \quad (1.97)$$

ここで、注意すべきことは、応力テンソル $\bar{\sigma}$ から圧力 p が抜き取られ、それが H_t の中に入っていることである。そのため、応力テンソルは、粘性応力テンソル $\bar{\tau}$ になっている。

以上により、流れ場の未知量 (u, v, w, p, ρ, T, μ) は7変数で、それに対して、7つの方程式、つまり、連続、運動方程式 (x, y, z の3方向)、エネルギー方程式、状態方程式、粘性係数の式が与えられる。これらを連立させて解けば、流れの解が得られる。これらの方程式を解析的に解いても良いし、数値的に解いても良い。

(参考) エントロピーの式

エントロピーが流れとともにどのように変化するかを表す式を以下に誘導する。式 (1.91) を変形して行く。この式の左辺は保存形になっているので、非保存形 (non-conservative form) に戻す。これは連続の方程式を利用して、差し引けばよい。その結果、以下の式が得られる。

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + e_i \right) = \text{div} (-\vec{q} + \bar{\sigma} \cdot \vec{u}) \quad (1.98)$$

ここで、応力テンソル $\bar{\sigma}$ は、

$$\bar{\sigma} = -pI + \bar{\tau} \quad (1.99)$$

であり、 I は単位行列 (unit matrix)、 $\bar{\tau}$ は粘性応力テンソルである。

一方、非保存形の運動方程式 (1.34) に対して速度ベクトル \vec{u} の内積を施し、左辺を変形する。ただし、外力は $\vec{X} = 0$ とし、速度ベクトル表記は、 $\vec{v} = \vec{u}$ である。

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = \vec{u} \cdot \text{div} \bar{\sigma} \quad (1.100)$$

式 (1.98) から式 (1.100) を引くと、

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = \text{div}(-\vec{q} + \bar{\sigma} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \text{div} \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \cdot \nabla \vec{u} - \text{div} \vec{q} \quad (1.101)$$

となる。この式の $\bar{\sigma}$ に、式 (1.99) を入れると、

$$\rho \frac{De_i}{Dt} + p \text{div} \vec{u} = \bar{\tau} \cdot \nabla \vec{u} - \text{div} \vec{q} \quad (1.102)$$

となる。(ちなみに、別の方法として、この式は、式 (1.84) において、 $\bar{\sigma}$ から圧力 p を分離することにより、簡単に導出できる。)

ここで、連続の式を利用する。連続の式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{u} = 0 \quad (1.103)$$

となるので、

$$\text{div} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad (1.104)$$

と変形できる。ここで、 v は、単位質量当りの体積である比容積 (specific volume) である。つまり、 $v = 1/\rho$ である。式 (1.104) を式 (1.102) に代入すると、

$$\rho \left(\frac{De_i}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} \right) = \bar{\tau} \cdot \nabla \vec{u} - \text{div} \vec{q} \quad (1.105)$$

が得られる。エントロピーの定義より、

$$T dS = de_i + p dv \quad (1.106)$$

となるので、これを式 (1.105) に代入すると、

$$\boxed{\rho T \frac{DS}{Dt} = \bar{\tau} \cdot \nabla \vec{u} - \text{div} \vec{q}} \quad (\text{entropy equation}) \quad (1.107)$$

が得られる。これがエントロピーの式である。粘性もなく、熱の流入も無ければ、流れに沿って流体エレメントのエントロピーは変化しない。(これに関しては、テキスト「圧縮性流体力学」の断熱流と等エントロピー流の箇所を参照されたい)

1.5 検査体積に基づく保存方程式

ここでは、流体中にある領域を占める検査体積 (control volume) を考え、それに作用する諸量の関係を調べる。

発散形 (divergence form) (発散形は保存形でもある) で書かれた流体の支配方程式は、

- 連続の方程式

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{u}) = 0} \quad (\text{continuity equation}) \quad (1.108)$$

- 運動量の方程式

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \text{div} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - \bar{\sigma}) = \vec{f}} \quad (\text{momentum equation}) \quad (1.109)$$

となる。ここで、微分演算子 div は $\text{div} = \nabla \cdot$ 、 \vec{f} は外力（体積力：単位体積当りの力）、 $\bar{\sigma}$ は応力テンソルである。また、運動量流束テンソル $\rho \vec{u} \otimes \vec{u}$ は、ベクトルのテンソル積（tensor product）で、書き下すと以下ようになる。

$$\rho \vec{u} \otimes \vec{u} = \begin{bmatrix} \rho u_1 u_1 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2 u_2 & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3 u_3 \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

- エネルギー方程式

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + e_i \right) \right] + \text{div} \left[\rho \vec{u} \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + e_i \right) - \bar{\sigma} \cdot \vec{u} + \vec{q} \right] = \vec{f} \cdot \vec{u}} \quad (\text{energy equation}) \quad (1.111)$$

ここで、応力テンソル $\bar{\sigma}$ には圧力 p が含まれていることに注意。

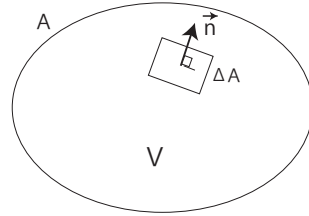


図 1.8: 検査体積 V (control volume)

各方程式を体積積分する

ここで流れ場中に体積 V の領域を考える（図 1.8）。その領域内での体積積分に対して、以下の発散定理（divergence theorem）を適用する。

$$\iiint_V \text{div} \vec{w} dV = \iint_A \vec{n} \cdot \vec{w} dA \quad (1.112)$$

$$\iiint_V \text{div} \bar{T} dV = \iint_A \vec{n} \cdot \bar{T} dA \quad (1.113)$$

ここで、 A は検査体積 V の表面を表し、 \vec{n} はその表面に垂直方向の単位長さベクトルである。また、 \vec{w} は任意のベクトルで、 \bar{T} は任意の 2 次のテンソルである。

この関係を使って、上述の支配方程式を体積積分する。

- 連続の方程式の体積積分

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{u}) \right\} dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \text{div} (\rho \vec{u}) dV = 0 \quad (1.114)$$

第 2 項に発散定理を適用すると

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \vec{n} \cdot (\rho \vec{u}) dA = 0} \quad (1.115)$$

- 運動量方程式の体積積分

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \text{div} (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - \bar{\sigma}) \right\} dV - \iiint_V \vec{f} dV = 0 \quad (1.116)$$

これに発散定理を適用すると

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{u} dV + \iint_A \vec{n} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} - \bar{\sigma}) dA - \iiint_V \vec{f} dV = 0} \quad (1.117)$$

ここで、 $\bar{\sigma}$ は応力テンソルである。

- エネルギー方程式の体積積分

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + e_i \right) \right\} dV + \iint_A \vec{n} \cdot \left\{ \rho \vec{u} \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + e_i \right) - \bar{\sigma} \cdot \vec{u} + \vec{q} \right\} dA = \iiint_V \vec{f} \cdot \vec{u} dV} \quad (1.118)$$

ここで応力テンソル $\bar{\sigma}$ には圧力 p が含まれている。

これらの体積積分された式で、時間微分が積分の外にあるか、中にあるかが重要となる。それには Leibnitz の法則を適用すると便利である。

Leibnitz の公式 空間と時間の関数である任意の関数 f に関して、

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f(\vec{r}, t) dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_A \vec{n} \cdot \vec{u}_A f dA \quad (1.119)$$

が成立する。ここで、 \vec{u}_A は、検査体積 V の面 A 上にある面素 dA の移動する速度である。もし、検査体積の表面が静止していれば、つまり、 $\vec{u}_A = 0$ であれば、

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V f(\vec{r}, t) dV \quad (1.120)$$

となり、時間微分を体積積分の外に出すことができる。

物体が運動している場合を計算するとき、時間的に変化する量 $\partial f / \partial t$ を実際に体積積分するのは困難である。そこで、Leibnitz の公式を用いて、 f を体積積分した量の時間変化に置き換える。

以上のことから、検査体積が運動している場合には、上述の流れの支配方程式は以下のように表わすことができる。

- 連続の式は

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho dV \right] - \iint_A \vec{n} \cdot \rho (\vec{u}_A - \vec{u}) dA = 0} \quad (1.121)$$

となる。

- 運動量の式は、

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \vec{u} dV \right] - \iint_A \vec{n} \cdot \{ (\vec{u}_A - \vec{u}) \otimes \rho \vec{u} + \bar{\sigma} \} dA = \iiint_V \vec{f} dV} \quad (1.122)$$

となる。

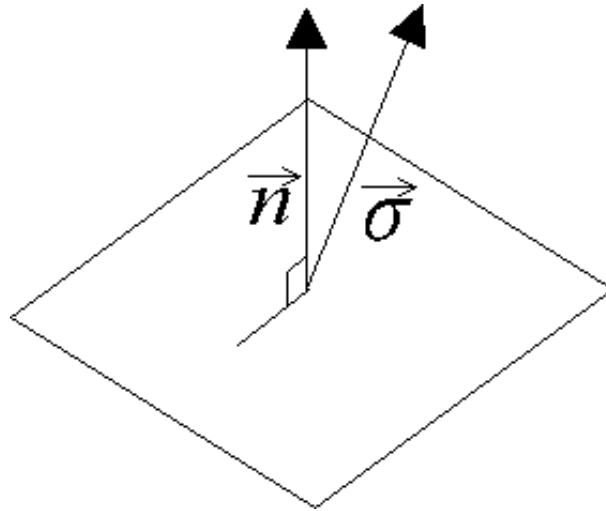


図 1.9: 平面に加わる応力

- エネルギーの式は、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + e_i \right) dV \right] - \iint_A \vec{n} \cdot \left\{ \rho (\vec{u}_A - \vec{u}) \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + e_i \right) + \vec{\sigma} \cdot \vec{u} - \vec{q} \right\} dA \\ & = \iiint_V \vec{f} \cdot \vec{u} dV \end{aligned} \quad (1.123)$$

となる。ここで、 $T = \vec{a} \otimes \vec{b}$ は、 \vec{a} と \vec{b} のテンソル積と呼び、 $T_{ij} = a_i b_j$ である。

(参考) ある面(面は、面に垂直な単位ベクトル \vec{n} が定義されれば決定される)に作用する応力は、ベクトル \vec{n} とテンソル σ_{ij} のスカラー積により、次のように計算される。

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31} \\ n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32} \\ n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

ここで、 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ で、 $\vec{\sigma}$ は応力テンソルである。

ちなみに、応力テンソル $\vec{\sigma}$ は対称テンソルであるので、対称テンソルの場合には、順序を入れ替えても同じになり、 $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ である。

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{pmatrix} \quad (1.125)$$

この場合には、応力は、 $\vec{\sigma} = \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i$ と表すことができる。ここで、 \vec{e}_i は i 座標方向の単位ベクトルである。

(参考了)

以上より、検査体積が移動している場合には、以下の事に注意するとよい。

- 面の移動速度 \vec{u}_A は、必ず $\vec{n} \cdot (\vec{u}_A - \vec{u})$ の形で方程式の中に入ってくる。
- 仕事の中に \vec{u}_A が入らないのは、仕事は実質的に気体そのものが運動することによりなされるからである。

ちなみに、Leibniz の公式の 1 次元での記述は

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx \\ &= \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f[h(\alpha), \alpha] \frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f[g(\alpha), \alpha] \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} \end{aligned} \quad (1.126)$$

である。

1.6 ベクトル表示での支配方程式

ここでは、運動方程式および渦度方程式のベクトル表示について記述する。

1.6.1 運動方程式のベクトル表示

非圧縮性流に対する運動方程式をベクトルで表示すると

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.127)$$

となる。ここで、 D/Dt は実質微分 (substantial derivative) で、 \mathbf{V} は流体の速度ベクトルである。非圧縮性流であるために、粘性項が簡単化されている (圧縮性流に対する式 (1.42) ~ 式 (1.44) と比較せよ)。この式はコンパクトであるが、擬似ベクトル表現 (a pseudo-vector expression) と呼ばれ、デカルト座標以外に適用するときには注意を要する。

式 (1.127) の 2 番目の式において、その 2 番目の項をベクトルの公式で変形すると

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.128)$$

となる。ここでは、ベクトルの公式

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A} \quad (1.129)$$

において、 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{V}$ とした結果が使われている。ここで、微分演算子 rot は、 $\text{rot} = \nabla \times$ である。さらに、渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ と定義されるから、

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.130)$$

とも表せる。

また、 $\nabla^2 \mathbf{V}$ はスカラー演算と異なるので注意を要する。そこで、この項を以下のベクトルの公式を使って変形すると、より間違いの少ない形になる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{V} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) \\ &= \nabla(\text{div} \mathbf{V}) - \nabla \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (1.131)$$

1.6.2 渦度方程式のベクトル表示

式 (1.130) に微分演算子の rot (具体的には $\nabla \times$) を施すと

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1.132)$$

となる。ここでは、 $\nabla \times \nabla$ は、同じベクトルのベクトル積であるから、 $\nabla \times \nabla = 0$ となることが使われている。また、渦度ベクトル $\vec{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (1.133)$$

である。

式 (1.132) の左辺第 2 項を以下のベクトルの公式を使って変形する。

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} \quad (1.134)$$

これを使うと式 (1.132) は以下ようになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (1.135)$$

ここで、渦度ベクトルの実質微分 (対流微分) つまり

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} \quad (1.136)$$

を使って整理すると、式 (1.135) は以下のように表せる。

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V}}_{\text{渦のストレッチング項}} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (1.137)$$

この方程式は Helmholtz の渦方程式と呼ばれる。

この式の左辺は渦度が流れとともに運ばれていくときの变化率を表す。つまり、右辺が 0 であれば、渦度は流れとともにただ運ばれるだけで変化しない。一方、右辺が存在する場合には、流れとともに渦度は増加したり、減少したりする。ただ、2次元流の場合には、右辺第 1 項は完全に 0 になる。理由は、渦度ベクトル $\vec{\omega}$ と ∇ は 2次元平面では必ず垂直になるからである。2次元流で粘性が無い場合には、右辺は完全に 0 となり、渦度は流れとともに変化しない。

ちなみに、式 (1.137) の右辺第 1 項は、渦のストレッチング項と呼ばれる。3次元流において渦がその軸方向に伸びた場合、この項は正の値となり、その結果、左辺の渦度が流れとともに増加することになる。これは、渦管が伸びることにより、渦管の断面積が減少することと、断面内でのトータルな渦の量は同じであるので、断面積が小さくなることにより渦度が大きくなることを意味する。

(参考)

乱流では、大きな渦が小さな渦に壊れていくカスケード現象 (cascade phenomenon) が起こるが、これはまさに、ここで述べた渦のストレッチング現象に起因している。(了)

ヘリシティ

流れ場の中の渦度が持つ性質として、ヘリシティ (Helicity) がある。これは、流れの速度ベクトル \vec{v} と渦度ベクトル $\vec{\omega}$ との内積 (scalar product) の領域積分である。式で表すと

$$H = \iiint \vec{v} \cdot \vec{\omega} dV \quad (1.138)$$

となる。ヘリシティ H は、非圧縮性の NS 方程式では保存される。

1.7 円柱座標での支配方程式

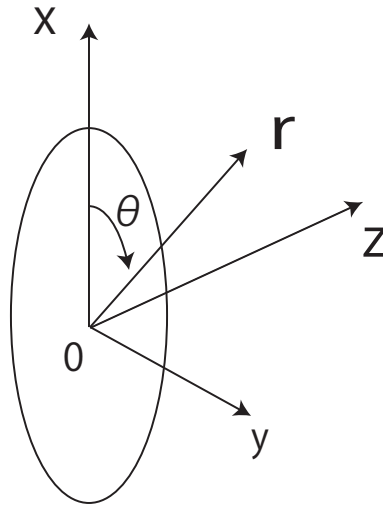


図 1.10: 円柱座標

円柱座標 (cylindrical coordinates) (r, θ, z) とは、円管のような形状を表わすのに便利な座標系である。この座標系を使って、流れの方程式を記述するのが便利な場合がある。それぞれの方向の速度成分を (v_r, v_θ, v_z) とする。非圧縮性流に対しては以下の方程式が得られる。

a) 半径方向 (radial direction) の運動方程式 :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.139)$$

b) 周方向 (circumferential direction) の運動方程式 :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (1.140)$$

c) 軸方向 (axial direction) の運動方程式 :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1.141)$$

(注意) 円柱座標として、 (r, θ, z) 座標表示の他に、 (x, r, θ) 座標表示が使われることがある。後者の場合には、軸方向の運動方程式である式 (1.141) において、下付き添え字および独立変数を $z \rightarrow x$ に変えるだけで良い。

円柱座標における連続の方程式は、

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.142)$$

と書ける。ここで、微分演算子 ∇ は、円柱座標では、

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.143)$$

となる。 θ 方向の微分が $r d\theta$ になっていることに注意。ちなみに、微分演算子 ∇^2 は

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.144)$$

である。

また、渦度 (vorticity) の定義は、

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (1.145)$$

であるが、円柱座標における渦度の各成分は

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} && \text{(半径方向)} \\ \omega_\theta &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} && \text{(周方向)} \\ \omega_z &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} && \text{(軸方向)} \end{aligned} \right\} \quad (1.146)$$

となる。

円柱座標ではなぜこのような複雑な形を取るのかについて考えてみる (直接の理由は、 r 座標線がお互いに平行でないからである)。運動方程式のベクトル表示は、非圧縮性流体では、式 (1.127) より

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.147)$$

となる。

これに対して、円柱座標 (cylindrical coordinates) では、式 (1.139) ~ 式 (1.141) を、微分記号などを使って、より簡便な形で書くと以下ようになる。

a) 半径方向の運動方程式は

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (1.148)$$

となる。ここで、

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.149)$$

である。式 (1.148) の左辺を、実質微分 D/Dt を用いて書き換えると、

$$\left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \quad (1.150)$$

となる。ここで、円柱座標での実質微分は、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.151)$$

である。

b) θ 方向の運動方程式は

$$\boxed{\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)} \quad (1.152)$$

となる。

c) z 方向の運動方程式は

$$\boxed{\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = \frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z} \quad (1.153)$$

となる。

また、非圧縮性流に対する連続の方程式のベクトル表示、およびこれに対する円柱座標表示で書き下した式は以下のようになる。

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \quad (1.154)$$

(参考1) ここで、ベクトル表示の式から円柱座標での各成分を誘導する方法について考える。例えば、対流項 (advection term) のベクトル表示式である $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ から、半径方向の速度成分を出すことを考える。

円柱座標では、速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (1.155)$$

と書くことができる。ここで、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ は、 r, θ, z 方向の単位ベクトルである。

従って、これらの式をベクトル表示の式に代入すると、式 (1.147) の対流項は、

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \\ &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + v_r^2 \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{v_\theta v_r}{r} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r}_{\mathbf{e}_\theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + v_z v_r \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_r + \dots \end{aligned}$$

となる。ここで、 r, θ, z に関する微分は、単位ベクトル ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$) にも作用することに注意。デカルト座標 (x, y, z) と違って、これらのいくつかは0にならない。

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} = 0 \quad (1.156)$$

例えば、 $\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta$ は、以下のようにして求められる (図 1.11 参照)。

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \approx r \Delta \theta \vec{e}_\theta \rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \theta} \approx r \vec{e}_\theta \rightarrow \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \theta r} \approx \vec{e}_\theta \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \quad (1.157)$$

\vec{e}_θ の θ 微分が $-\vec{e}_r$ になるので、式 (1.148) の左辺に出て来る対流項は、

$$\{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\}_r = (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \quad (1.158)$$

となる。式 (1.152) についても同様である。(参考了)

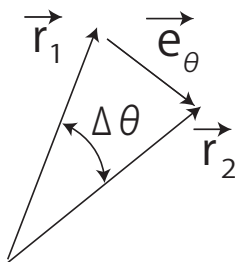


図 1.11: 円柱座標における単位ベクトルの微分

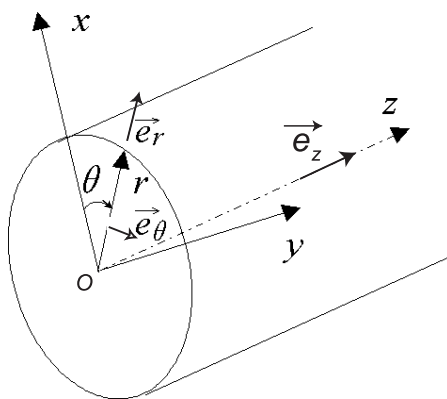


図 1.12: 円柱座標における各単位ベクトル

(参考 2) もう一つの誘導方法は、対流項をベクトルの公式で変形する。

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (1.159)$$

また、粘性項も同様に変形する。

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (1.160)$$

これらの関係式を利用して誘導する。(参考了)

円柱座標における渦度ベクトルの成分

円柱座標の渦度ベクトルの成分は、前述の方法を用いると、

$$\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \quad (1.161)$$

と表すことができる。ここで、式(1.156)の関係を使うと、円柱座標における渦度の各成分を求めることができる。

(参考) 円柱座標の渦度ベクトルは、以下のようにも表わすことができる。結果は、式 (1.161) と同じである。

$$\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix} \quad (1.162)$$

ちなみに、円柱座標での速度の歪み率は、以下のように表わすことができる。

$$S_{11} = S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (1.163)$$

$$S_{22} = S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad (1.164)$$

$$S_{33} = S_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.165)$$

$$S_{12} = S_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (1.166)$$

$$S_{13} = S_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (1.167)$$

$$S_{23} = S_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (1.168)$$

となる。

ちなみに、円柱座標での粘性応力成分は、

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} \quad (1.169)$$

となる。

1.7.1 軸対称流れの方程式

円柱座標で、 θ 方向の運動方程式は、式 (1.140) より、

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (1.170)$$

となる。この式は、周方向 (θ 方向) の速度 v_θ が存在する場合に意味がある。つまり、旋回流 (swirling flow) の場合である。

ここでは、一番簡単な旋回流を考える。流れは θ 方向に変化しないとする。これを軸対称近似 (axisymmetric approximation) と呼ぶ。さらに、軸方向 (z 方向) にも変化しないと仮定する。加えて、半径方向速度や軸方向速度も簡単化のため 0 にする。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad v_r = 0, \quad v_z = 0 \quad (1.171)$$

その結果、運動方程式 (1.170) は、以下のように簡略化される。

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (1.172)$$

この式の両辺を r 倍すると、

$$\rho \frac{\partial r v_\theta}{\partial t} = \mu \left(r \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (1.173)$$

となる。これを r で微分すると、

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) = \mu \left\{ r \frac{\partial^3 v_\theta}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^2} \right\} \quad (1.174)$$

となる。さらに、これを r で割ると、

$$\rho \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\zeta} (rv_\theta) = \mu \left\{ \frac{\partial^3 v_\theta}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^3} \right\} \quad (1.175)$$

となる。

z 方向の渦度 ($\zeta = \omega_z$) は、軸対称近似の場合

$$\zeta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \quad (1.176)$$

となり、式 (1.175) の左辺の時間微分の後に出て来る量が渦度 ζ になる。ここで、式 (1.176) の渦度 ζ を r に関して 1 階および 2 階微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} &= \frac{\partial^3 v_\theta}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^3} v_\theta \\ &= \frac{\partial^3 v_\theta}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^3} v_\theta \end{aligned} \quad (1.177)$$

となる。

これを使って、以下の左辺を計算すると

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \frac{\partial^3 v_\theta}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^3} v_\theta \quad (1.178)$$

となり、この右辺は式 (1.175) の右辺と等しくなる。従って、周方向の運動方程式に対する式 (1.175) は以下のように軸方向の渦度成分 ζ に対する方程式に変換される。ただし、これは 軸対称の場合 であることに注意。

$$\boxed{\rho \frac{\partial}{\partial t} \zeta = \mu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)} \quad (\text{渦度 } \zeta \text{ に対する方程式}) \quad (1.179)$$

(参考) この式の別の誘導として、式 (1.137) あるいは式 (1.135) を、第 1.7 節で述べた円柱座標への変換を利用することにより誘導できる。(参考了)

方程式 (1.179) を変形すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \right) \quad (1.180)$$

となる。ここで、 ν は動粘性係数で、 $\nu = \mu/\rho$ である。

式 (1.180) の解は、

$$\zeta = C_0 t^{-1} \exp \left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right) \quad (1.181)$$

となる。この式を、式 (1.176) に代入すると、周方向の速度 v_θ は

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - \exp \left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right) \right) \quad (1.182)$$

となる。ここで、 $\Gamma_0 = C_0\pi$ で、 Γ_0 は無限遠方での循環である。この式が通常出てくる軸対称渦の周方向速度に対する式である。

さらに式 (1.182) を変形すると、循環 $\Gamma (= 2\pi r v_\theta)$ に対する方程式が得られる。

$$\Gamma = 2\pi r v_\theta = \Gamma_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right) \quad (1.183)$$

(参考) 循環とは、速度の閉ループに沿っての一周積分である。(了)

1.8 球座標での運動方程式

ここでは、球座標 (r, θ, ϕ) の流れの方程式を考える。問題によっては、球座標 (spherical coordinates) で扱った方が便利な場合がある。 r は原点からの距離、 θ は北極 (z 軸) からの角度、 ϕ は赤道面 ((x, y) 平面) への投影位置に相当する経度である。

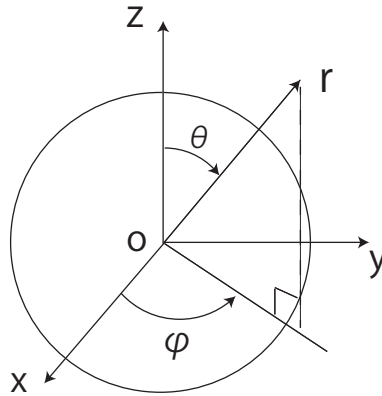


図 1.13: 球座標 (r, θ, ϕ)

球座標での連続の方程式は、

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{連続の方程式}) \quad (1.184)$$

となる。ここで、 (v_r, v_θ, v_ϕ) はそれぞれ (r, θ, ϕ) 方向の速度成分である。また、微分演算子 ∇ は、球座標では、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial}{r \partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1.185)$$

と表せる。

また、流れの加速度に対応する、球座標での対流微分 (実質微分) は、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.186)$$

となる。

これを使って、粘性係数 μ が一定値の場合の運動方程式を以下に示す。非圧縮性流では、通常粘性係数を一定として扱うが、圧縮性流では、流れ場中の温度変化が大きいため、粘性係数は、流れ場中の場所場所で異なり、一定値とすることはできない。

半径方向の運動方程式は、

$$\rho \left[\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2 + v_r^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (1.187)$$

となる。

θ 方向の運動方程式は、

$$\rho \left[\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta^2 - v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (1.188)$$

となる。

ϕ 方向の運動方程式は、

$$\rho \left[\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right] = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (1.189)$$

となる。ここで、演算子 ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1.190)$$

となる。

第2章 ナビエ・ストークス方程式の解

ナビエ・ストークス方程式にはいくつかの厳密解が存在する。ここで、それらを紹介しながらその流れについて勉強する。流れには大きく分けて2種類ある。ひとつは飛行機の周りの流れのような外部流 (external flow) で、もうひとつはパイプ内の流れのような内部流 (internal flow) である。ここではまず最初に内部流、つまり、壁と壁の間を流れる流体について調べてみる。

2.1 チャンネル流れ

2次元問題として考える。つまり、流れは (x, y) 座標で記述される。2次元非定常非圧縮性流れの運動方程式は以下のように表される。

x 方向の運動方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (2.1)$$

y 方向の運動方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (2.2)$$

である。ここで、右辺最後の項に出てくる微分演算子 ∇^2 は、書き下せば

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

である。これはナブラ $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ どうしの内積で、ラプラシアン Δ とも呼ばれる ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$)。また、 ρ は密度、 (u, v) は (x, y) 方向の速度成分、 p は圧力、 μ は粘性係数である。

ここで、以下の仮定をする。

仮定 1) 流れは x 方向に変化しない。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

ただし、通常は圧力勾配がないと流れが生じないため、この仮定は圧力項には適用されない。以降、同様な事が出てくるが、圧力は最初に手をつけなくて最後までそのまま残しておく。

仮定 2) 流れは定常と考える。時間微分は0である。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

となる。この流れは定常流 (steady flow) と呼ばれる。ちなみに、時間微分が0でないものを非定常流 (unsteady flow) と呼ぶ。

非圧縮性流の連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

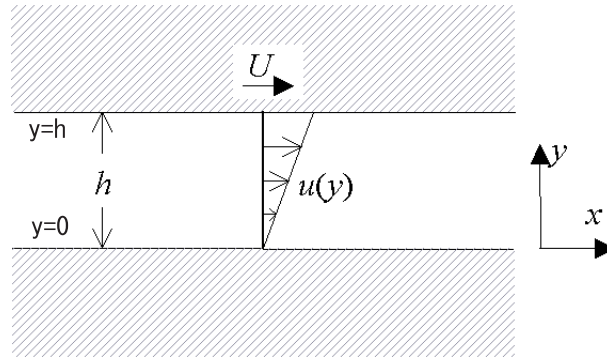


図 2.1: クエット流れ

となる。これに、仮定 1) を適用すると、左辺第 1 項は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

となり、その結果、式 (2.6) は、

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

となる。この式を y 方向に積分すると

$$v = \text{const.} \quad (2.9)$$

となる。一般に、壁では $v = 0$ より、 y 方向の至る所で、 y 方向の速度 v はゼロとなる。

2.1.1 クエット流れ (Couette Flow)

この流れは Maurice Couette (1858-1943 ; フランス人) により求められた。上面と下面に平板があり、その一つの面、ここでは、上面が上面に平行 (x 方向) に動いている場合である。今、上面が一定速度 U で動いているものとする。

この流れに対する境界条件 (boundary conditions) は、

$$y = 0 \text{ で } u = 0, \quad y = h \text{ で } u = U \quad (2.10)$$

となる。ここで、 h は隙間の間隔である。

x 方向の運動方程式である式 (2.1) に上述の仮定を代入すると、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

となる。

同様に、 $v = 0$ を y 方向の運動方程式に代入すると、式 (2.2) から、

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.12)$$

が得られる。つまり、圧力 p の y 方向の変化は存在しない。言い方を変えれば、 y 方向に圧力は一定である。

$$p = p(x) \quad (2.13)$$

式 (2.11) を変形すると,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.14)$$

となる。この式を良く見ると、左辺は x だけの関数で、右辺は式 (2.7) より、 y だけの関数になる。つまり、この方程式を満たすのは定数しかない。変数分離の概念より

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{const.} \quad (2.15)$$

式 (2.15) を y で積分すると,

$$\frac{dp}{dx} y = \mu \frac{du}{dy} + C_1 \quad (2.16)$$

ここで、 C_1 は積分定数である。この式をもう一度 y で積分すると,

$$\frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} = \mu u + C_1 y + C_2 \quad (2.17)$$

となる。ここで、 C_2 は積分定数である。この式に境界条件式 (2.10) を適用すると,

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ から} \rightarrow C_2 = 0 \\ y = h \text{ から} \rightarrow C_1 = \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} - \frac{\mu U}{h} \end{array} \right) \quad (2.18)$$

が得られる。

以上より、積分定数 C_1, C_2 の値 (2.18) を式 (2.17) に代入すると、 x 方向の速度成分 u が求められる。

$$u = U \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (2.19)$$

右辺第 1 項は線形分布、第 2 項は放物線分布 (以下に述べるポアゼーユ流れに相当) となる。主流方向に圧力勾配がない場合、つまり、 $\frac{dp}{dx} = 0$ の場合には,

$$u = \frac{U}{h} y \quad (2.20)$$

のように線形な分布となる。このように壁でのせん断力 (摩擦力) によって流れが引きずられ、チャンネル内に流れが誘起される。ちなみに、この場合の流体に働くせん断力 τ は、

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U}{h} \quad (2.21)$$

となり、 y 方向に一定となる。つまり、壁で発生するせん断力がそのまま流体中に伝播することになる。上面に接する流体部分と、下面に接する流体部分では、作用するせん断力の方向は逆となり、その結果、上面と下面にはさまれた流体全体に x 方向に外から掛かる力は $F_x = 0$ となり、力の釣り合いは取れている。その結果、流体全体は加速度運動しない流れとなる。

[問題] 圧力勾配の値を種々変えて (正と負)、クエット流れの速度分布を図示せよ。

2.1.2 ポアゼーユ流れ (Poiseuille Flow)

クエット流れと違って、上下板ともに静止している場合に生じる流れである。この流れを生じるためには、主流方向に圧力勾配が必要となる。

この流れに対する境界条件は,

$$y = \pm b \text{ で } , u = 0 \quad (2.22)$$

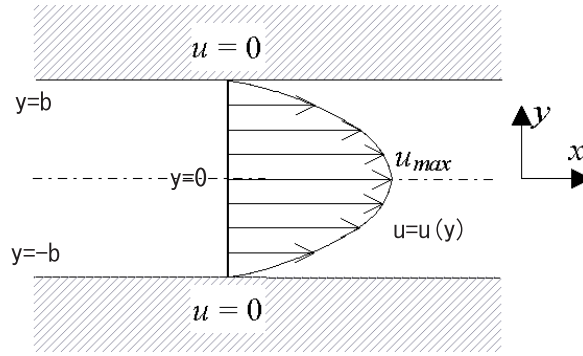


図 2.2: ポアゼーユ流れ

である。

式 (2.22) の境界条件を式 (2.17) に代入して未知係数 C_1, C_2 を決定すると,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{b^2}{2} \frac{dp}{dx} \quad (2.23)$$

となる。この積分定数を式 (2.17) に代入すると、 x 方向の速度成分 u が得られる。

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) (b^2 - y^2) \quad (\text{放物線}) \quad (2.24)$$

この流れに対する体積流量 Q は速度 u を y 方向に積分することによって得られる。

$$Q = \int_{-b}^b u \, dy = \frac{2b^3}{3\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.25)$$

この体積流量 Q を使って、速度 u が書きかえられる。

$$u = \frac{3Q}{4b} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} \quad (2.26)$$

また、中心軸上で速度は最大となり、この最大速度を使うと、速度は

$$u = u_{max} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} \quad (2.27)$$

となる。

2.1.3 ハーゲン・ポアゼイユ流れ (Hagen-Poiseuille flow)

ポアゼイユ流れは全くの2次元流であったが、これを円管内の流れで考えたものをハーゲン・ポアゼーユ流れと呼ぶ。Hagen は 1839 年にこの流れに対して実験を行った。

ここで、中心軸回りの旋回成分が無いとし、また軸対称近似を考える。

$$v_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (2.28)$$

この近似を施すと、軸方向の運動方程式 (1.141) は簡略化されて以下ようになる。

$$\mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} \quad (2.29)$$

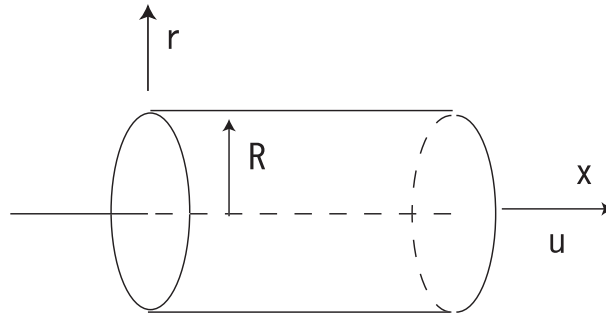


図 2.3: 円管内の軸対称流れに対する円柱座標

ここでは、軸方向は z ではなく、 x としている。境界条件は、中心軸で対称条件、壁では速度 0 として

$$\left. \begin{array}{l} r = 0 \quad \text{で} \quad \frac{du}{dr} = 0 \\ r = R \quad \text{で} \quad u = 0 \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

となる。従って、式 (2.29) を境界条件 (2.30) の下に解くと、

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) (R^2 - r^2) \quad (2.31)$$

となる。この速度分布は放物線である。

ここで、先に述べたように圧力勾配は一定となる。

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.} \quad (2.32)$$

つまり、

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (2.33)$$

と表すことができる。ここで、 l は主流方向の任意の長さで、 p_1 はその上流端での圧力を、 p_2 はその下流端での圧力を示す。ハーゲンポアゼーユ流れを作り出すためにはこの圧力勾配を外から、例えば、ポンプ等で与える必要がある。

この流れの最大速度は、中心軸 $r = 0$ で起こり、その値は

$$u_{max} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.34)$$

となる。

また、体積流量 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r \, dr \\ &= \int_0^R -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r \, dr \\ &= \left(-\frac{1}{4\mu} \right) \frac{dp}{dx} 2\pi \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。このことから、体積流量は圧力勾配に比例することが分かる。つまり、上流端と下流端との圧力差を2倍にすると、流量は2倍になる。また、流量はパイプの半径の4乗に比例する。つまり、パイプの断面を大きくすると、流量増大の効果は大である。その一方で、流量は、粘性係数 μ に逆比例する。粘性が大きい流体は必要な流量を流すのが困難である。ここで考えているのは層流の場合であるが、乱流でも基本的には同様な性質を持っている。

平均速度 \bar{u} は、

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2} Q = \frac{1}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) R^2 \quad (2.36)$$

となる。

(参考) 式(2.36)は層流の場合で、層流の場合には圧力勾配 $\partial p/\partial x$ と平均速度 \bar{u} の関係は、 $\bar{u} \sim \partial p/\partial x$ であるが、Reynolds は彼の実験で、乱流の場合には、 $\bar{u} \sim (\partial p/\partial x)^{1/1.7}$ つまり、 $\bar{u} \sim (\partial p/\partial x)^{0.59}$ であることを見出している。乱流の方が、同じ圧力勾配を掛けても流れにくいことを示している。(参考了)

管内の流れでは、負の圧力勾配がないと流れが起きない。逆の見方をすれば、管内に流れが起きると、必ず流れ方向に圧力は減少する。これは圧力損失と呼ばれる。この負の圧力勾配は、抵抗と同等である。この場合、抵抗係数 f (Darcy の friction factor) が導入される。

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{f}{D} \frac{\rho V^2}{2} \quad (2.37)$$

ここで、 V は管内の平均速度である。

この圧力勾配は、壁のところで生じる摩擦応力が原因である。上流の断面の掛かる力(圧力)と下流の断面で掛かる力(圧力)の差は、

$$p_1 \pi R^2 - p_2 \pi R^2 \quad (2.38)$$

である。一方、流れの抵抗となる摩擦応力による力は、表面積を掛けて、

$$\tau_w (2\pi R) \Delta L \quad (2.39)$$

ΔL は主流方向の管の長さである。以上の2つ力が釣り合うので、

$$p_1 \pi R^2 - p_2 \pi R^2 = \tau_w (2\pi R) \Delta L \quad (2.40)$$

となる。これを变形すると

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \tau_w \frac{2}{R} \quad (2.41)$$

となる。ここで、 $\Delta p = p_1 - p_2$ である。左辺は圧力勾配であるので、

$$\frac{dp}{dx} = \tau_w \frac{2}{R} \quad (2.42)$$

式(2.37)と式(2.42)は等しいので、

$$\frac{f}{D} \frac{\rho V^2}{2} = \tau_w \frac{2}{R} \quad (2.43)$$

となる。この式を整理すると、

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \quad (2.44)$$

となる。つまり、管内の抵抗係数は、壁での摩擦応力に関係している。

速度分布の式 (2.31) を半径 r で微分して、 $r = R$ とおき、それに粘性係数 μ を掛けると、壁での摩擦応力が求められる。これを上式に代入すると、

$$f = \frac{64}{Re_D} \quad (2.45)$$

ここで、レイノルズ数 Re_D は

$$Re_D = \frac{VD}{\nu} \quad (2.46)$$

である。

ちなみに、乱流の場合には、

$$f = 0.316 Re^{-1/4} \quad 3 \times 10^3 \leq Re \leq 10^5 \quad (2.47)$$

$$f = 0.032 + 0.221 Re^{-0.237} \quad 10^5 \leq Re \leq 3 \times 10^6 \quad (2.48)$$

となる。乱流の場合には、解析的に求めることが出来ず、実験的データに基づくものになる。

(参考) 円管流では、円管入口から円管の軸に沿ってある程度下流に行ったところで、ハーゲンポアゼーユ流れが成立する。この距離 L は、層流では以下の式で近似される。

$$L = 0.065 Re D \quad (2.49)$$

ただし、入口がベルマウスの場合である。ちなみに、乱流の場合には以下のようになる。

$$L = 20 \sim 40 D \quad (2.50)$$

2.2 渦糸の減衰

渦糸とは渦の半径（あるいは渦核）が無限小のものである。従って、渦の軸のところで特異性（そこである量が無限大となる）が現れる。これは理想的な渦の場合である。実際には粘性の効果により、特異性はおさえられ、渦中心で有限値になるような分布になる。また、時間とともに渦度が半径方向に拡散していく。

(注意) 渦度は時間とともに半径方向に拡散していくが、トータルの渦度の量は同じままである。

ここで、円柱座標 (r, θ, z) を考える。 z 軸を渦の回転軸とする。時間 t と半径方向座標 r に関する、軸方向 (z 方向) の渦度成分 ζ に対する方程式は、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \quad (2.51)$$

となる。ここで、 ν は動粘性係数である。この式は、渦度に関する方程式 (1.137) から導出される。ここで考えている流れが2次元のため、方程式 (1.137) の右辺第1項 (ストレッチ項) は0になる。

z 方向の渦度 ζ は、円柱座標では速度成分を使って以下のように定義される。

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (2.52)$$

軸対称の場合、あるいは、半径方向の速度 u_r がない場合には、渦度 ζ は簡略化されて

$$\zeta = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \quad (2.53)$$

となる。

ちなみに、 r 方向の渦度 ξ 、および θ 方向の渦度 η は、以下のように表わすことができる。

$$\xi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (2.54)$$

これらに関連する方程式は、第2章の "突然加速される平板" の問題での解法 (相似解法) と同様にして解くことができる。

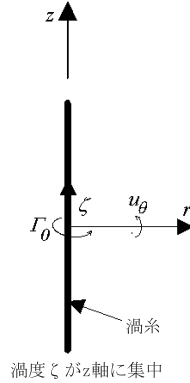


図 2.4: 渦糸とそれにより誘起される流れ

回転方向 (あるいは周方向) の速度成分である u_θ は

$$u_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (2.55)$$

となる。この式は Oseen(1912) によって見出された。ここで、 Γ_0 は無限遠方で ($r \rightarrow \infty$) 計算された循環 (circulation) である。

(問題) 式 (2.55) の回転速度に対する圧力分布 $p(r)$ を、半径方向の運動方程式から求めなさい。

循環 Γ の定義は

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2\pi r u_\theta \quad (2.56)$$

である。つまり、速度の一周積分である。

(問題) 周方向速度 v_θ を時刻 t を変えて同じにプロットせよ。

一方、循環 Γ に対する方程式は

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \quad (2.57)$$

となる。

(参考) 式 (2.57) は、渦度の式 (2.51) に $2\pi r$ を掛けて、 r で積分すると求められる。

式 (2.57) を解くと

$$\Gamma = \Gamma_0 \{1 - \exp(-\eta^2)\} \quad (2.58)$$

となる。つまり、循環 Γ は、相似変数 η だけの関数として表せる。ここで、 η の定義は

$$\eta^2 = \frac{r^2}{4\nu t} \quad \text{あるいは} \quad \eta = \frac{r}{2\sqrt{\nu t}} \quad (2.59)$$

である。一般的に相似変数は無次元で、この η も無次元である。

(注意) Γ には相似性があるが、回転速度 v_θ や渦度 ζ には相似性が無いことに注意。

(参考) 式 (2.57) は、2.3 節の突然動き出す平板に沿う流れで述べられているのと同じ方法で、解を求めることができる。

式 (2.53) および式 (2.58) を使うことにより、渦度成分 ζ が得られる。

$$\zeta = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \quad (2.60)$$

ここで、注意することは、 ζ は相似変数 η だけの関数ではないことである。つまり、渦度 ζ はこの流れでは相似ではない。

Stokes の定理より、渦度を面積分すると循環 Γ が得られる。

$$\Gamma = \int_0^r \zeta \cdot 2\pi r \, dr = \Gamma_0 \left[1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right)\right] \quad (2.61)$$

これは、式 (2.58) と同じである。 t が 0 での極限における渦度は、ディラックのデルタ関数を使って、 $\Gamma_0\delta(r)$ と表せる。これが理想的な渦糸 (vortex filament) の状態である。

(注意) 循環とは、その一周の中に含まれる渦度の総和である。

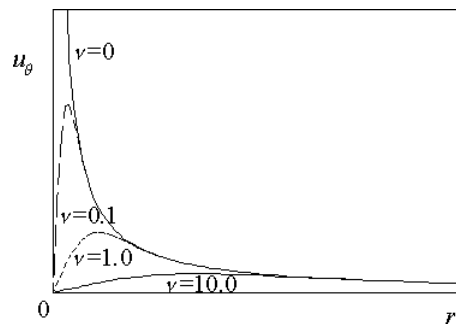


図 2.5: 粘性による渦糸の拡散

式 (2.55) で表わされる u_θ の分布を図 2.6 に示す。速度分布の図の見方として、二通りある。パラメータとして、ひとつは動粘性係数 ν で見ると (図 2.5)、もうひとつは時間 t で見ると (図 2.6)。相似変数 η の中に ν と t は同じような形に入っているため、どちらも同じ効果を持つ。動粘性係数の

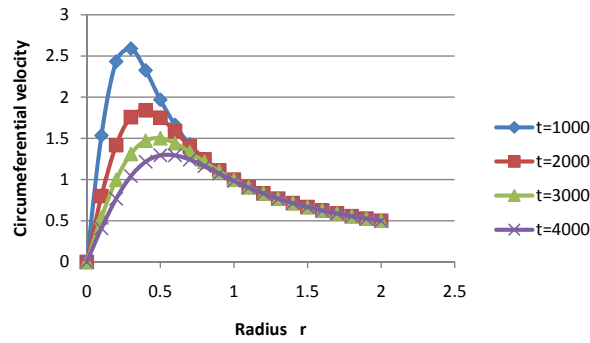


図 2.6: 周方向速度の時間変化

変化として見ると、粘性が大きいほど渦は拡散する。粘性が0のときには(つまり、 $\nu = 0$ のときには)渦核は0になり、急なカーブを描く。これは、理想的な渦系の場合に相当する。このときには、

$$u_{\theta} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \quad (2.62)$$

であり、渦度は

$$\begin{aligned} r > 0 &: \text{渦度} = 0 \\ r = 0 &: \text{渦度} = \infty \quad (\text{渦度が一点に集中}) \end{aligned}$$

となる。一点で無限大になるが、領域積分をすれば有限値となる。

これに粘性が入ると、渦度が半径方向に拡散した分布形状をとる(拡散現象、diffusion)。粘性が入った流れでの、 u_{θ} が満たすべき周方向の運動方程式は

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r^2} \right) \quad (2.63)$$

である。これと循環 Γ の満たすべき式(2.57)との関係は以下の計算式から得られる。

$$\begin{aligned} u_{\theta} &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\Gamma}{r^2} \right) \times \frac{1}{2\pi} \\ \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{2}{r^3} \Gamma \right) \times \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \Gamma - \frac{\Gamma}{r^3} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。

なお、循環の式(2.57)に対する境界条件は、

$$\begin{aligned} \Gamma(r, 0) &= \Gamma_0 & t = 0 \\ \Gamma(0, t) &= 0 & t > 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる。

相似解 (similarity solution) とは、ある解がいくつかの変数がいっしょになった一つの相似変数だけで表されるものである。循環の解は、 $\eta = r/\sqrt{\nu t}$ という無次元変数が相似変数となる。

周方向の速度の式 (2.55) は、中心軸付近の $r \ll \sqrt{4\nu t}$ では、剛体回転 (solid rotation) となる。これは、テーラー展開すれば得られる。

$$u_\theta = \omega r = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} r \quad (2.66)$$

ここで、 ω は角速度である。

一方、中心軸から離れた遠方、つまり、 $r \rightarrow \infty$ では、ポテンシャル旋回となる。

$$u_\theta \sim \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \quad (2.67)$$

(参考) 解析等によく使われる Taylor 渦は、以下の形を取る。

$$v_\theta = \omega r \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) \quad (2.68)$$

$$\zeta = \omega(2-r^2) \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) \quad (2.69)$$

ここで、 v_θ は周方向速度で、 ζ は渦度である。係数 ω は、最大渦度を表す。この Taylor 渦は、 $r \rightarrow \infty$ で循環が 0 になる。

2.2.1 ビオ・サバールの法則

空間中に渦度 $\vec{\omega}$ が分布しているときに、それらの渦度は速度を誘起する。その誘導速度 (induced velocity) はビオ・サバール (Biot-Savart law) の法則によって計算される。

今、空間中に渦線 l が存在しているとする。その渦線 l の途中の要素 dl は、ベクトルで \vec{dl} と表される。その渦線要素の位置ベクトルを \vec{x}' とする。また、渦線の強さはその周りの循環の強さ Γ とする。このとき、空間中の 1 点 $P(x, y, z)$ に渦 l によって誘起される速度はビオ・サバールの法則を用いて以下のように表される。

$$\vec{u}_p(x, y, z) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times \vec{dl}(\vec{x}')}{r^3} \quad (2.70)$$

ここで、 r は渦要素 \vec{dl} と点 P との距離である。

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}', \quad r = |\vec{r}| \quad (2.71)$$

ちなみに、このビオ・サバールの法則は電磁気学でおなじみである。電磁気学では閉じた導線を流れる定常電流による磁場を計算するのに使われる。

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3} \quad (2.72)$$

ただし、 \vec{B} は磁束密度 (Wb/m^2)、 I は電流、 s は電流の流れる軌跡に沿ったパラメータで、 $d\vec{s}$ はその微小要素ベクトルである。また、 μ_0 は透磁率である。式 (2.70) と比較すると、

$$\mu_0 I = \Gamma \quad (2.73)$$

の関係がある。

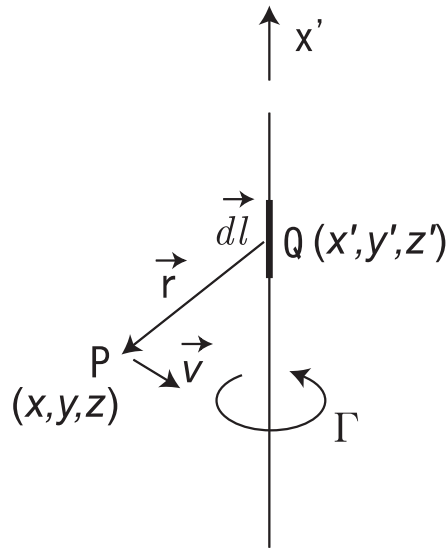


図 2.7: 渦糸により誘起される速度

(参考)

式 (2.70) のビオ・サバルの法則は、数値計算法として、渦法 (vortex method) に応用されている。渦法では、渦度の分布した領域を何本かの渦フィラメントで近似し、渦フィラメントが作り出す誘導速度で、そのフィラメントの位置を時々刻々移動させていく (ラグランジュ的な方法)。例えば、各フィラメントが渦糸ではなく、渦度が分布している場合 (渦核がある場合)、渦法では、渦フィラメントの要素位置 \vec{r}_i を、以下の式で計算する。

$$\frac{\partial \vec{r}_i(\xi, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^L \int \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\partial \vec{r}_j / \partial \xi') s(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \sigma_i, \sigma_j) d\xi'}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \quad (2.74)$$

ここで、 \vec{r}_i, \vec{r}_j は、渦フィラメントをいくつかの要素に分割した場合の、 i, j 番目の要素の位置ベクトルを示す。また、 $s(y, \sigma_i, \sigma_j)$ は、渦フィラメント内 (渦核内) での渦度の分布で、ガウス分布の場合には、

$$s(y, \sigma_i, \sigma_j) = \frac{1}{[1 + 0.413(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)/2y^2]^{3/2}} \quad (2.75)$$

となる。ここで、 σ は、渦核 (core) の大きさである。

2.2.2 角速度と渦度

角速度 (angular velocity) と渦度 (vorticity) は以下の関係がある。一定の角速度 ω で剛体回転している場合には、周方向の速度 v_θ は

$$v_\theta = \omega r \quad (2.76)$$

となる。また、渦度 ζ は、

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\omega r^2) = \frac{1}{r} 2\omega r = 2\omega \quad (2.77)$$

となる。つまり、渦度 ζ は角速度 ω の 2 倍である。

$$\text{渦度} (\zeta) = 2 \times \text{角速度} (\omega) \quad (2.78)$$

2.2.3 渦の作る圧力分布

円柱座標の半径方向の運動方程式において軸対称を仮定すると

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.79)$$

となる。

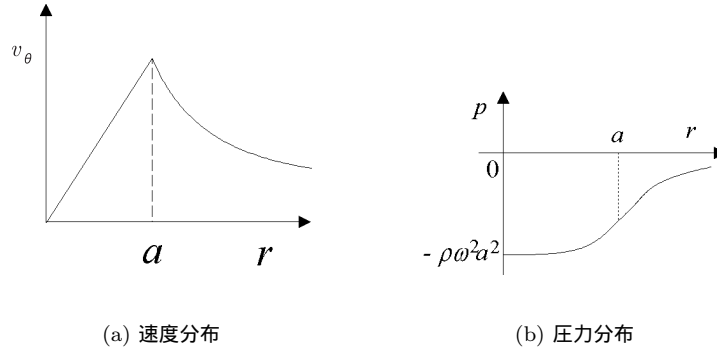


図 2.8: 合成渦の速度分布と圧力分布

今、次のような合成渦（内側の剛体回転渦と外側のポテンシャル回転渦を半径 a で結合する）を考える。

$$v_\theta = \omega r \quad r < a \quad (2.80)$$

$$v_\theta = \frac{\omega a^2}{r} \quad r > a \quad (2.81)$$

式 (2.80) を式 (2.79) に代入して、 r で積分する。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad \rightarrow \quad p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + p_c \quad (2.82)$$

式 (2.81) を式 (2.79) に代入して、 r で積分する。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 a^4 \frac{1}{r^3} \quad \rightarrow \quad p = -\frac{\rho \omega^2 a^4}{2} \frac{1}{r^2} \quad (2.83)$$

ただし、 $r \rightarrow \infty$ で $p \rightarrow 0$ とする。

これら 2 つの式において、 $r = a$ (渦核) で p が等しいとおくと、定数 p_c が決定される。

$$p_c = -\rho \omega^2 a^2 \quad (2.84)$$

以上より、合成渦が作り出す圧力は

$$p = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho \omega^2 a^2 \quad (0 < r < a) \quad (2.85)$$

$$p = -\frac{\rho \omega^2 a^4}{2} \frac{1}{r^2} \quad (a < r) \quad (2.86)$$

となる。

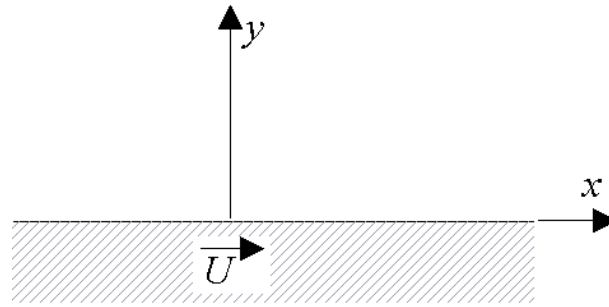


図 2.9: 突然加速される平板上の流れ

2.3 突然動き出す平板による流れ

静止していた平板が突然一定速度 U で平板表面に沿った方向に動き出すときの流れを考える。このとき、平板上方の流体場では、粘性によるせん断力 τ で流れが発生する。

この流れを支配する方程式は、 x 方向に流れが変化しないとして ($\partial/\partial x = 0$)、 x 方向の運動方程式より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.87)$$

となる。ちなみに、平板に垂直な座標 (y) 方向の流れの速度 v は 0 である。これは、連続の式に、 $\partial u/\partial x = 0$ を代入することにより得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = 0 \quad (2.88)$$

平板上で速度は 0 である、つまり $v = 0$ であるので、 y 方向のどこでも $v = 0$ となる。

式 (2.87) は、典型的な拡散方程式の形 (放物型) をしている。つまり、速度 u が時間とともに y 方向に拡散する。ここで、 u は x 方向の速度成分、 ν は動粘性係数である。

この流れ (あるいは、この方程式) に対する境界条件は、

$$\left. \begin{array}{l} t < 0 \text{ では} : u(t, y) = 0 \\ t \geq 0 \text{ では} : \begin{array}{ll} y = 0 & \text{で } u = U \\ y \rightarrow \infty & \text{で } u \rightarrow 0 \end{array} \end{array} \right\} \quad (2.89)$$

となる。

この流れでは、 x 方向に境界がないため相似解が存在することが考えられる。このとき、以下のような相似変数 η を定義する。

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (2.90)$$

ここで、 η は無次元となっていることに注意。この式の解釈は、分母の $2\sqrt{\nu t}$ が壁からの特性長さで、壁からの任意の距離 y をこの特性長さで割ったもので分布を表せば、それは時間に寄らない (時間で変化しない) 可能性があるということである。

問題 式 (2.90) が無次元になっていることを確かめよ。

この関係を使って方程式 (2.87) を座標変換する。つまり、

(t, y) 座標 \implies (τ, η) 座標

に変換する．具体的に、 (τ, η) は

$$\left. \begin{aligned} \tau &= t \\ \eta &= \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

である。

一般的には、

$$\tau = \tau(t, y) \quad (2.92)$$

$$\eta = \eta(t, y) \quad (2.93)$$

であり、また、逆に

$$t = t(\tau, \eta) \quad (2.94)$$

$$y = y(\tau, \eta) \quad (2.95)$$

と表される。

(t, x) 座標での微分から (τ, η) 座標での微分の変換は、鎖則 (chain rule) を用いて以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{y}{4\sqrt{\nu t}^3} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2\tau} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{\nu \tau}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\nu \tau}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2\sqrt{\nu \tau}} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{4\nu \tau} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (2.98)$$

式 (2.96) から式 (2.98) までの微分関係式を方程式 (2.87) に代入する。また、このとき、 x 方向の速度成分 u を

$$u = Uf(\eta) \quad (2.99)$$

とおく。つまり、速度の次元は U に持たせ、相似変数 η だけの関数 f を導入する。結果として、

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (2.100)$$

が得られる。ここで、 $()'$ は η での微分を表す。

問題 式 (2.100) を誘導せよ。

境界条件式 (2.89) は、変換された座標 (τ, η) (式 (2.91)) では、以下のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 & \text{ で } f = 1 \\ \eta \rightarrow \infty & \text{ で } f \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

式 (2.100) を 2 回積分して、境界条件式 (2.101) を代入すると、 f は以下のように求められる。

$$f(\eta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + 1 \quad (2.102)$$

ただし、ここで、誤差関数に関する公式

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.103)$$

を使用している。

問題 式(2.102)を誘導しなさい。

従って、式(2.99)より、平板に沿う方向の速度成分 u は

$$u = U \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right] = U \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \quad (2.104)$$

となる。ここで、 $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数 (error function) を表し、以下のように定義される。

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx \quad (2.105)$$

問題 y 方向速度成分 v はどのようにになっているか。

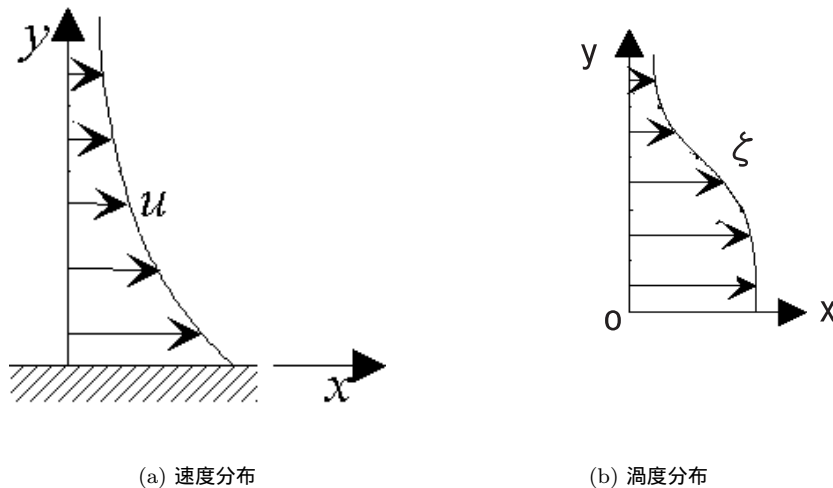


図 2.10: 平板が移動する場合の速度分布と渦度分布

次に、粘性流れ場で非常に重要な渦度 (vorticity) を調べる。2次元流では、流れの速度ベクトルは考えている2次元平面内にあるので、その結果、 z 軸方向成分の渦度 ω_z だけが存在する。それを $\zeta (= \omega_z)$ とおくと、

$$\zeta(y, t) = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_0 - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \left(-\frac{2U}{\sqrt{\pi}} \right) \exp\{-\eta^2\} = \frac{U}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4\nu t}\right\} \quad (2.106)$$

となる。ここで η は、式(2.90)で定義され、 u は式(2.104)で与えられる。

この式を見ると、渦度 ζ は、壁面上 ($y=0$) で y 方向の変化率が0になることが分かる。つまり、渦度の y 方向分布は壁で壁に垂直となる。

ちなみに、デカルト座標 (Cartesian Coordinates) で渦度は次式で表される。

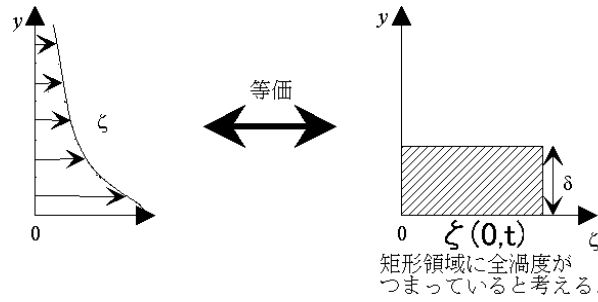


図 2.11: 渦度の拡散の程度

$$\begin{aligned} \omega = \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} &= (\vec{i}\partial/\partial x + \vec{j}\partial/\partial y + \vec{k}\partial/\partial z) \times (\vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w) \\ &= \vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

ここで、 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は x, y, z 方向の単位ベクトル (unit vector) で、また $\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \dots$ のベクトル積の関係が使われている。

従って、各方向の渦度成分は、

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.108)$$

となる。

次に、渦度が拡散 (diffusion) していく程度を調べる。つまり、板に垂直方向 (y 方向) にどのくらいの中を亘って渦度が主に分布しているかを特性巾 δ を用いて表すことを考える。このようにして、 δ は以下のように定義する。

$$\zeta(0,t)\delta = \int_0^\infty \zeta(y,t) dy \quad (2.109)$$

左辺は、式 (2.106) で、 $y = 0$ とおくと、

$$\zeta(0,t)\delta = \frac{U\delta}{\sqrt{\pi\nu t}} \quad (2.110)$$

となる。

また、右辺の、渦度の y 方向の積分は

$$\int_0^\infty \zeta(y,t) dy = \int_0^\infty \frac{U}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} dy = \int_0^\infty \frac{2U}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} d\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = U \quad (2.111)$$

ちなみに、この式は、全渦度が時間が経過しても一定であることを示している。つまり、渦度全体の量は保存される。

問題 平板が速度 U で動いている状態から、突然停止した場合、流れ場中の渦度の合計はどうなるか。

従って、式 (2.110) と式 (2.111) を等しいとおくと、

$$\frac{U\delta}{\sqrt{\pi\nu t}} = U \quad (2.112)$$

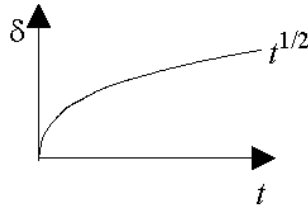


図 2.12: 拡散領域の時間変化

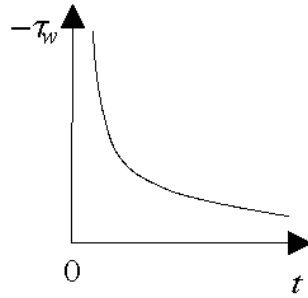


図 2.13: 壁に働くせん断応力の時間変化

となる。よって、

$$\delta = \sqrt{\pi\nu t} \quad (2.113)$$

となる。つまり、渦度が主に分布している領域の巾 δ は、 \sqrt{t} に比例して増加することが分かる。これは大事な関係式で、後述する境界層の厚さにも関係している。また、これは、式(2.90)で定義した相似変数 η の分母と定数を除いて一致している。

また、特性巾の時間変化は、

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\nu}{t}} \quad (2.114)$$

これは拡散の割合を示し、巾の変化率は時間とともに減少する。つまり、最初は非常に速く拡散するが、徐々に遅くなっていく。

更に、壁でのせん断力 (shearing stress) は、

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\rho U^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\nu}{U^2 t} \right)^{\frac{1}{2}} = -\rho U \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.115)$$

壁でのせん断力 τ_w は $t^{\frac{1}{2}}$ で減少していく。壁自身は x の負の方向に力を受ける、つまり、動いている壁にとって抵抗となる。

2.4 二次元澱点流れ

2次元翼に主流が当る前縁付近では澱点が形成され、その後、その流線が物体に添って2つの方向に分かれる。その澱点付近を拡大すると、流れが壁に垂直に突入した場合に相当する。このような流れをここでは勉強する。まず、この流れ場に対する支配方程式を以下に示す。

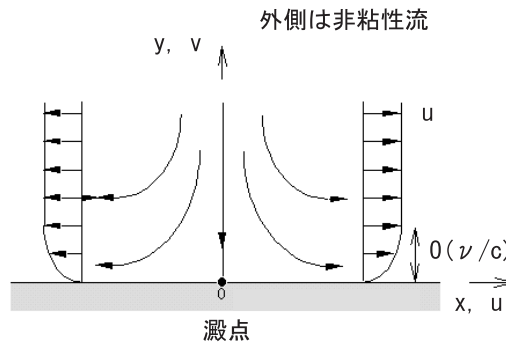


図 2.14: 2次元澱点流れ

連続の方程式は以下のものである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.116}$$

x 方向および y 方向の運動方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2.117}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{2.118}$$

となる。

この流れに対する境界条件は、 x 方向の任意の位置 $x = x (x \geq 0)$ において、

$$y = 0 \quad : \quad u = 0, v = 0 \tag{2.119}$$

$$y \rightarrow \infty \quad : \quad u \rightarrow \tilde{u}, v \rightarrow \tilde{v} \tag{2.120}$$

である。ここで、 \tilde{u}, \tilde{v} は粘性流の外側に存在するポテンシャル流領域の、 x および y 方向速度成分である。つまり、 \tilde{u}, \tilde{v} はポテンシャル流れの解で、以下のように書ける。

$$\tilde{u} = cx, \quad \tilde{v} = -cy \tag{2.121}$$

ただし、 $c > 0$ である ($c < 0$ の場合は、後方澱み点)。この式は少なくとも連続の方程式を満たす。

これは、テキスト「非圧縮性流体力学」のポテンシャル流れで勉強した、角(かど)を過ぎる流れを表す複素速度ポテンシャル W :

$$W = \phi + i\psi = Cz^n \tag{2.122}$$

において、 $n = 2$ の場合として得られる (2つの平面のなす角 θ は $\theta = \pi/n$ で、 $n = 2$ より $\theta = \pi/2$ 、つまり直角となる)。ただし、 z は複素平面を表し、 $z = x + iy$ である。また、 $c = 2C$ である。

当然の事ながら、この速度分布は連続の方程式を満たすし、以下の渦なし流れを表すポテンシャル方程式も満たす。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.123}$$

ちなみに、 ϕ は以下のように定義される。

$$\tilde{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.124)$$

問題 式(2.121)が連続の方程式およびポテンシャルの方程式を満たすことを確認せよ。

次元解析により、 c と ν の次元は以下ようになる。(ここで、 c は次元を持っていることに注意)

$$[c] = \left[\frac{\tilde{u}}{x} \right] = \frac{m/s}{m} = \frac{1}{s}$$

$$[\nu] = \frac{m^2}{s}$$

この2つの量を使って(次元を考えて)、ここで考えている粘性領域における壁から垂直方向の特性長さ(あるいは基準長さ) l_y は

$$l_y = \sqrt{\frac{\nu}{c}} \quad (2.125)$$

となる。

従って、この流れに対する相似変数 η は、

$$\eta = \frac{y}{l_y} = \frac{y}{\sqrt{\nu/c}} = y\sqrt{\frac{c}{\nu}} \quad (2.126)$$

となる。

ここで、 x および y 方向の速度成分 u および v を以下のように定義する。

$$u = cx f'(\eta), \quad v = -\sqrt{\nu c} f(\eta) \quad (2.127)$$

ここで、 f は η だけの関数で、無次元量である。また、式(2.127)の速度成分は、連続の方程式(2.116)を恒等的にみたす。本来この式は、流れ関数 ψ から誘導した方が分かりやすい。つまり、

$$\psi = \sqrt{\nu c} x f(\eta) \quad (2.128)$$

である。ここで、 $\sqrt{\nu c}$ は速度の次元を持つ。つまり、この付近の速度のオーダーを決定するものである。一方、 x は長さの次元であるので、速度×長さは、流れ関数の次元となる。これに次元を持たせて、 $f(\eta)$ は無次元となる。この ψ を使って、速度成分 u, v は、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.129)$$

から計算でき、式(2.127)が求められる。

問題 式(2.127)の速度 u, v の次元を調べ、また、それらが連続の式を満たすことを確認せよ。

このポテンシャル流れでは式(2.121)より明らかなように、対称線($x=0$)から離れていくほど(x が大きくなるほど)速度が増大する。その結果、以下のベルヌーイの定理

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 \quad (2.130)$$

(ここで、 p は圧力、 v は速度、 p_0 は総圧である)より、対称線から離れるほど圧力 p が減少していく。つまり、圧力勾配は負となる。式で表すと、

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0 \quad (2.131)$$

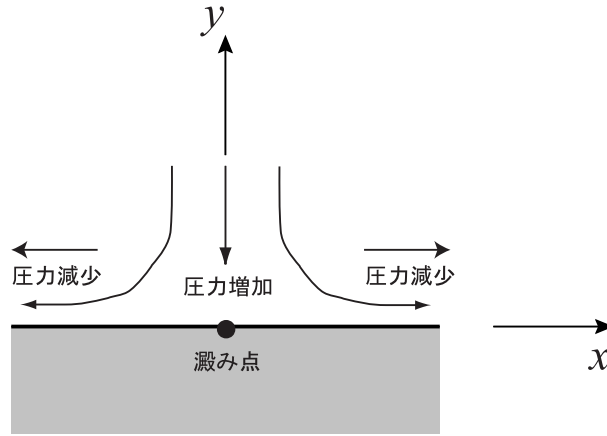


図 2.15: 澱み点付近の圧力分布

となり、この場合には第 3 章の境界層理論のところで述べるように、順圧力勾配 (favorable pressure gradient) に相当し、剥離は生じない。つまり、澱点付近の流れは剥離を生じない。

壁付近での粘性の効いた領域を解析するために、デカルト座標 (x, y) から相似変数の座標 (ξ, η) への変換，

$$(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta) \tag{2.132}$$

を考える。ここで、相似変数 ξ および η は

$$\xi = x \tag{2.133}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{\nu}} y \tag{2.134}$$

である。これを使うと微分の変換 (chain rule) は具体的に以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \tag{2.135}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tag{2.136}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{c}{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{2.137}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{c}{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\frac{c}{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \frac{c}{\nu} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tag{2.138}$$

ここで、

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \tag{2.139}$$

を使用している。

この関係を使うと、式 (2.117) の x 方向の運動方程式は、

$$c^2 x f'^2 - c^2 x f f'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + c^2 x f''' \tag{2.140}$$

となる。同様にして、式 (2.118) の y 方向の運動方程式は、

$$\sqrt{\nu c c} f f' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - c \sqrt{\nu c} f'' \tag{2.141}$$

となる。

問題 式(2.140)および式(2.141)を誘導せよ。

壁近傍から十分離れた遠方では、別の言い方をすれば、粘性流の外側の流れ(ポテンシャル流)に近づくと、

$$u \rightarrow \tilde{u} = cx, \quad v \rightarrow \tilde{v} = -cy \quad (2.142)$$

となるので、これを式(2.117)の x 方向の運動方程式に代入すると、

$$c^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (2.143)$$

これは外側の流れの圧力勾配を示す。ただし、 \tilde{p} は外側の流れ(ポテンシャル流)の圧力を示す。

一方、式(2.141)を x あるいは ξ で微分すると、

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \quad (2.144)$$

つまり、粘性層内で y 方向に

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \quad (2.145)$$

である。と言う事は、粘性層の外側の圧力勾配がそのまま粘性層を横切り壁まで達することを示している。つまり、式(2.143)が粘性層内で成り立つことを示している。

$$c^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.146)$$

ここで、 \tilde{p} が p に変化していることに注意。従って、これを用いて、式(2.146)を式(2.140)に代入すると、

$$f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0 \quad (2.147)$$

が得られる。ここで、 f は η に関する常微分方程式となっている。

(参考) 式(2.147)は、Falkner-Skan 方程式の一つである。Falkner-Skan 方程式は、

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (2.148)$$

と表わすことができる。ここで、 β は

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (2.149)$$

である。この m は、境界層の外側の流れ(ポテンシャル流れ)の速度変化に関係する。(角を回るポテンシャル流れに関しては、テキスト「非圧縮性流体力学」の第2.8節の「角を回る流れ」を参照すること)

$$\frac{u_e}{u_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (2.150)$$

ここで、 $m = 1$ とすれば(上述の渦み点流れは、 $u_e \sim x$)、 $\beta = 1$ となり、

$$f''' + f f'' + 1 - f'^2 = 0 \quad (2.151)$$

が得られる。また、 $m = 0$ ($\beta = 0$) の場合は、 $u_e = \text{const}$ となり、後述の境界層法方程式の相似解である Blasius の方程式と同じになる。角(かど)の角度は、 β あるいは m の値によって変化する。こ

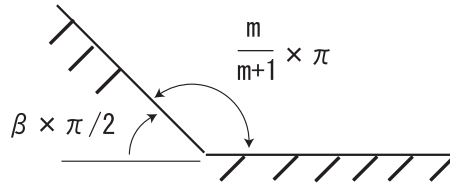


図 2.16: 角をまわる流れ (Falkner-Scan 方程式)

れに関しては、図 (2.16) を参照のこと。(参考了)

式 (2.147) は、3 階の常微分方程式で、境界条件は 3 個必要である。境界条件に関する式 (2.119) と (2.120) を、変換に関する式 (2.126), (2.127) に対応させると、相似変数における以下の境界条件が得られる。

$$y = 0 \quad \rightarrow \quad \eta = 0 \quad : \quad u = 0 \quad \rightarrow \quad f' = 0 \quad (2.152)$$

$$v = 0 \quad \rightarrow \quad f = 0 \quad (2.153)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \eta \rightarrow \infty \quad : \quad u \rightarrow cx \quad \rightarrow \quad f' \rightarrow 1 \quad (2.154)$$

方程式 (2.147) を数値的に解くために、この 3 階常微分方程式を以下のように連立 1 階常微分方程式に変形する。

$$\begin{cases} f' = m \\ m' = g \\ g' = -fg + m^2 - 1 \end{cases} \quad (2.155)$$

左辺は 1 階微分で、 (f, m, g) を解く問題である。これをベクトル表示すると、

$$\frac{d\vec{y}}{d\eta} = \vec{F}(\eta, \vec{y}) \quad (2.156)$$

ここで、 \vec{y} は解ベクトル、 \vec{F} は右辺ベクトルである。

$$\vec{y} = (f, m, g)^t \quad (2.157)$$

$$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^t \quad (2.158)$$

$$F_1 = F_1(f, m, g) = m \quad (2.159)$$

$$F_2 = F_2(f, m, g) = g \quad (2.160)$$

$$F_3 = F_3(f, m, g) = -fg + m^2 - 1 \quad (2.161)$$

である。つまり、 F_1, F_2, F_3 はそれぞれ f, m, g の関数である。

この問題を解くための境界条件は

$$f = 0, \quad m = 0 \quad \text{for} \quad \eta = 0 \quad (2.162)$$

$$m \rightarrow 1 \quad \text{for} \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.163)$$

この境界条件では、 $\eta = 0$ で g の値がない。計算は $\eta = 0$ からスタートするので、最初、 g に任意の値を入れ、 η のある程度大きい値まで計算する。次に、そこでの m が 1 になるように、 $\eta = 0$ での g の値を変化させて再度計算する。これを $m = 1$ になるまで繰り返し計算 (iteration) する。このとき Newton 法などを使うと収束が速くなる。

微分方程式の数値計算によく使われるスキーム（数値積分）に Runge-Kutta の4段階・4次精度スキーム（four-stage, fourth-order method）がある。これを以下に示す。

解くべき方程式を

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.164)$$

とすると、これに対する Runge-Kutta の4段階・4次精度スキームは

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f^0 + 2f^1 + 2f^2 + f^3) \quad (2.165)$$

となる。これは、 x 方向に積分していく場合、 $x = x_n$ での解 y_n は既知で、ここから Δx 前進したところ (x_{n+1}) での解 y_{n+1} を求めるものである。ここで、

$$\left. \begin{aligned} f^0 &= f(x_n, y_n) \\ f^1 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf^0) \\ f^2 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf^1) \\ f^3 &= f(x_n + h, y_n + hf^2) \end{aligned} \right\}$$

で、 $h = \Delta x$ である。ここで、式 (2.165) の係数 (1, 2, 2, 1) は重みで、加えると6になっている。その前で6で割っているのが、結局1になり、重みとして機能している。

ルンゲ・クッタ法の特徴は、 $x < 0$ での値（過去の値）がなくても計算が $x = 0$ からスタートできることである。

式 (2.164) はスカラー (scalar) 量 (y, f) に対して書かれているが、ベクトル量 (\vec{y}, \vec{f}) であっても各成分に対してこの方法を適用すれば同じように計算できる。

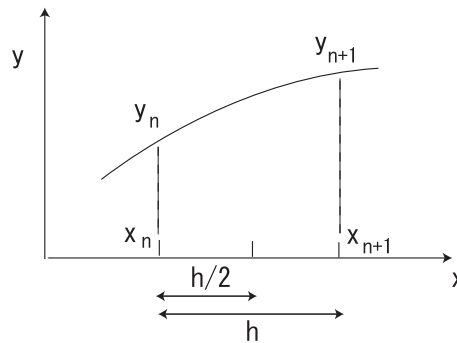


図 2.17: 4次精度ルンゲクッタ法

(問題) 方程式 (2.147) を4次精度ルンゲクッタ法を用いて解きなさい。

第3章 境界層理論

3.1 境界層とは

粘性流では、物体表面で速度が0になるため、物体表面近くで、物体表面に垂直方向の速度分布に歪みが生じる。その結果、その領域では渦度が発生し分布する。これを境界層 (boundary layer) と呼ぶ。境界層には層流境界層 (laminar boundary layer) と乱流境界層 (turbulent boundary layer) があるが、ここでは層流境界層について述べる。

粘性流体の中で一番大事なパラメータはレイノルズ数 (Reynolds number) である。一般に、粘性が小さいか、速度が大きいか、あるいは、物体が大きい場合には、レイノルズ数 Re は増加する。

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}}$$

ここで、 U は代表的な速度、 L は代表的な長さ、 ν は動粘性係数 (粘性係数 μ を密度 ρ で割ったもの) である。

レイノルズ数が大きくなると、粘性が影響する領域は物体近傍に限られてくる (境界層厚さが薄くなるため)。この性質を使うことにより、本来、ナビエ・ストークス方程式で表される粘性流れが単純化される。これを境界層方程式と呼ぶ。低速流 (非圧縮性流) で、かつ、定常流の場合、方程式の型は、ナビエ・ストークス方程式の楕円型方程式から、境界層の放物型方程式になる。境界層方程式では、上流から下流方向に計算を進める (スペースマーチング) ことにより解が上流から順番に求められる。このような境界層理論は、1904年、プラントル (L. Prandtl; ドイツの科学者; 1875-1953) によって提案された。なお、プラントルの業績は、1) 境界層理論、2) 薄翼理論、3) 揚力線理論などで、2) と3) についてはテキスト「非圧縮性流体力学」の中で説明されているので、参照されたい。

流体中に存在する物体周りの流れは、2つの領域に分けて考えることができる。

- 物体近くの薄い層 (強い渦度が存在する) … 境界層
- その外側の流れ領域 (渦度がない) … ポテンシャル流

まず、第1番目の物体近くの流れでは、物体から垂直方向の速度分布の変化 $\partial u / \partial y$ が非常に大きい (ここで、 y は物体に垂直方向の座標、 u は物体に沿う方向の速度成分)。その結果、この領域内ではせん断力 $\tau = \mu \partial u / \partial y$ が大きくなる。このせん断力により、壁で摩擦応力が生じ、物体は抵抗 (摩擦抵抗) を受ける。

一方、第2番目の領域 (外側の領域) では、速度分布の歪みは小さい。よって、粘性の影響はほとんど受けない。

ちなみに、境界層で生じた渦度は下流方向に流れに乗って流される (対流)。このようにして、物体の下流側には、渦度の詰まった領域が尾を引くように存在する。この領域を後流 (wake) あるいは

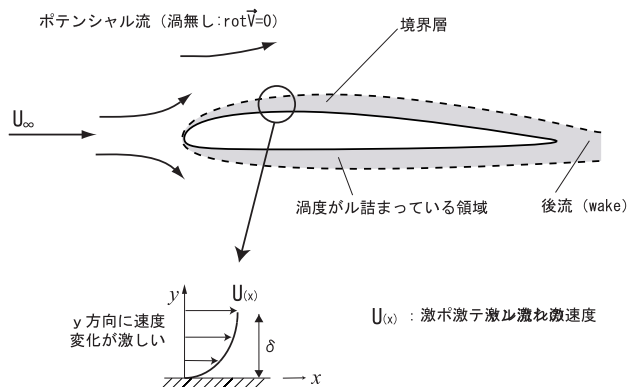


図 3.1: 物体表面近くに形成される境界層の概略図

伴流と呼ぶ。後流での総圧 (total pressure) の減少分を勘定すれば、物体に作用する抗力が計算できる。(正確には、物体を囲む検査面 (control surface) を考え、その面上での出入りを調べる)

一般に、境界層の厚さは、粘性とともに増大する。つまり、

$$\delta \sim \sqrt{\nu} \quad (3.1)$$

である。また、境界層厚さはレイノルズ数とともに減小する。

境界層近似をするときは、

$$\delta \ll L \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (3.2)$$

の仮定を用いる。ここで、 δ は境界層厚さであり、 L は物体の代表長さである。

(参考) 上の式において、

$$\frac{\delta}{L} = O(\epsilon), \quad 1 = O(\epsilon^0) \quad (3.3)$$

と書くことができる。 $O(\epsilon)$ は1次のオーダー (1次の微小量)、 $O(\epsilon)^0$ は0次のオーダーと呼ぶ。(了)

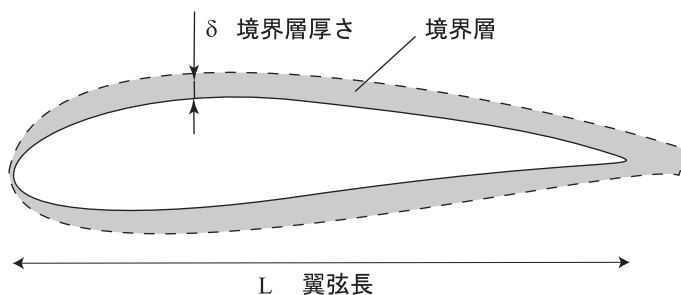


図 3.2: 境界層厚さと代表長さ

3.2 支配方程式

ここでは、ナビエ・ストークス方程式に対して境界層近似を行い、境界層方程式を誘導する。先ず、ナビエ・ストークス方程式を構成している各項のオーダー（大きさ）を調べる。

3.2.1 各項のオーダー

支配方程式の各項のオーダーを調べるために、基準量 (reference values) が必要である。それらは、

- 速度： 一様流速度 U_∞
- 長さ： 翼の翼弦長 (chord length) L
- 圧力： ρU_∞^2 (ρ は密度)
- 時間： L/U_∞ (長さと言速の基準量が分かれば、それらから時間の基準量は求められる)

(問題) ρU_∞^2 , L/U_∞ の次元を確認せよ。

次に、支配方程式の各項のオーダーを調べていく。簡単化のために、2次元で考える。

1) 連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim U_\infty \frac{\delta}{L} \quad (3.4)$$

つまり、連続の方程式から、 y 方向の速度 v の大きさが決定される。それは、 U_∞ に比べて1オーダー小さくなること分かる。

2) x方向運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

↓

$$\underbrace{\frac{U_\infty}{L/U_\infty} + U_\infty \frac{U_\infty}{L} + \frac{U_\infty \delta U_\infty}{L \delta}}_{\frac{U_\infty^2}{L}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \underbrace{\left(\frac{U_\infty}{L^2} + \frac{U_\infty}{\delta^2} \right)}_{\frac{U_\infty}{\nu \delta^2}} \quad (3.6)$$

ここで、式(3.2)の近似が適用される。つまり、粘性項の括弧内の2つの項の大小比較は

$$\frac{U_\infty}{L^2} \ll \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad (3.7)$$

となる。

また、左辺の慣性項と右辺の粘性項が同じオーダーの大きさになるためには(お互いが情報交換できるためには)、以下の条件が必要である。

$$\frac{U_\infty^2}{L} = \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 = \frac{\nu}{L U_\infty} = \frac{1}{Re} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = Re^{-1/2} \quad (3.8)$$

ここで、レイノルズ数 Re は、以下のように定義されている。

$$Re = \frac{L U_\infty}{\nu} \quad (3.9)$$

式(3.8)を見ると、境界層厚さと長さスケールとの比の2乗はレイノルズ数に反比例することが分かる。

一方、 y 方向の運動方程式は、 x 方向の運動方程式と同様にそのオーダーを調べることができる。ただし、圧力項に関しては手を付けずにそのままにしておく。

3) y 方向運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

↓

$$\frac{\frac{U_\infty}{L} \delta}{\frac{L}{U_\infty}} + U_\infty \frac{\frac{U_\infty}{L} \delta}{L} + \frac{U_\infty}{L} \delta \frac{\frac{U_\infty}{L} \delta}{\delta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\frac{U_\infty}{L} \delta}{L^2} + \frac{\frac{U_\infty}{L} \delta}{\delta^2} \right)$$

↓

$$\frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L} + \frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L} + \frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{U_\infty}{L^2} \cdot \frac{\delta}{L} + \frac{U_\infty}{\delta^2} \cdot \frac{\delta}{L} \right) \quad (3.10)$$

この式と式(3.6)を比べると、この式は、オーダーとして、式(3.6)全体に δ/L を掛けた形になっている。つまり、式(3.6)より1オーダー(δ/L だけ)大きさが小さくなっている。従って、 x 方向の運動方程式を考慮するのであれば、 y 方向の運動方程式は無視してよい。つまり、解く必要がない。

また、 y 方向の運動方程式より、 y 方向の圧力勾配の大きさに関して以下の関係が得られる。

$$\frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L} \simeq -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.11)$$

これより、圧力の y 方向の変化 δp は

$$\delta p \sim \rho \cdot \frac{U_\infty^2}{L} \cdot \frac{\delta}{L} \cdot \delta \quad (3.12)$$

となる。ここで、境界層を横切る長さを考えているので、 $\delta y \sim \delta$ としている。この圧力変化を無次元化すると

$$\frac{\delta p}{\rho U_\infty^2} \sim \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \quad (3.13)$$

となり、 y 方向の圧力変化は2次のオーダーの微小量であることが分かる。つまり、小さいものとして無視できる。以上より、境界層理論では、圧力は y 方向(壁から垂直方向)に一定であるとみなすことができる。

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.14)$$

と近似できる

3.2.2 外側の流れ

一方、物体表面に添う x 方向の圧力変化は、境界層の外側にあるポテンシャル流れによって決定される。式(3.14)より、外側のポテンシャル流で発生した圧力がそのまま境界層内にしみ込むことになる。

$$p(x, \delta) = p(x, 0) \quad (3.15)$$

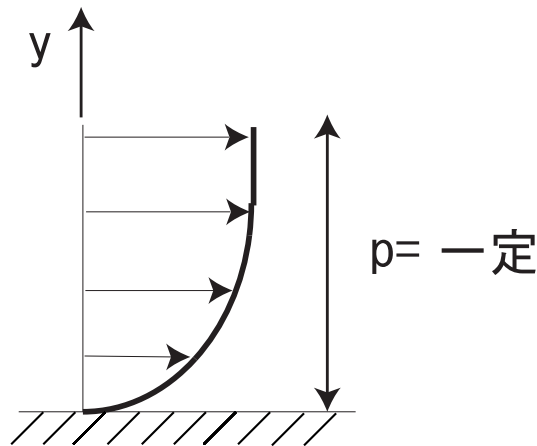


図 3.3: 境界層を横切る方向の圧力変化

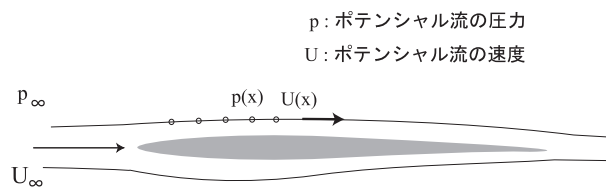


図 3.4: ポテンシャル流の速度と圧力

境界層の外側の流れ（ポテンシャル流）では、もっと正確に言うと、ポテンシャル流と境界層の境界では、

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{3.16}$$

の条件が成立する。これを適用すると、非定常流に対しては

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.17}$$

となる。右辺は本来、大文字の P （ポテンシャル流での圧力）で表されるべきであるが、式（3.14）より、境界層内では y 方向に圧力は変化しないので、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \tag{3.18}$$

となる。

定常流では、式（3.17）は、

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.19}$$

となる。従って、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

となり、 x で積分すると

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{const.} = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \tag{3.20}$$

が得られる。これはまさにベルヌーイの方程式である。この式の一定値（constant）は流線毎に違っていても良い。ただし、上流での流れが一樣流の場合には、どの流線でも、同じ一定値を持つ。

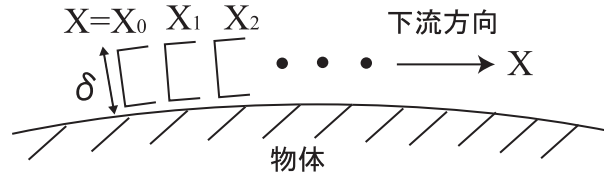


図 3.5: 境界層方程式の計算手順

ポテンシャル流れを解き、翼に沿っての速度 $U(x)$ が分かれば、式 (3.20) より圧力 p が、また、(3.19) より 圧力勾配 $\partial p/\partial x$ が求められる。この圧力勾配を式 (3.5) に代入すれば、速度 u に対する方程式を解くことができる（ただし、境界層近似された式は少し簡単化される）。

3.2.3 プラントルの境界層方程式

x 方向の運動方程式 (3.5) は、上述した、各項の大きさの評価を利用して、簡略化される。その結果、以下の境界層方程式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.22)$$

あるいは、右辺の圧力勾配項をポテンシャル速度 U を用いた式で置き換える場合には、以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.24)$$

この方程式を解くためには境界条件が必要である。具体的には

$$y = 0 \quad : \quad u = v = 0 \quad (3.25)$$

$$y \rightarrow \infty \quad : \quad u = U(x, t) \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (3.26)$$

時間変化がない定常流に対しては、支配方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.27)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.28)$$

となる。

これに対する境界条件は

$$y = 0 : \quad u = v = 0, \quad y \rightarrow \infty : \quad u = U(x) \quad (3.29)$$

となる。

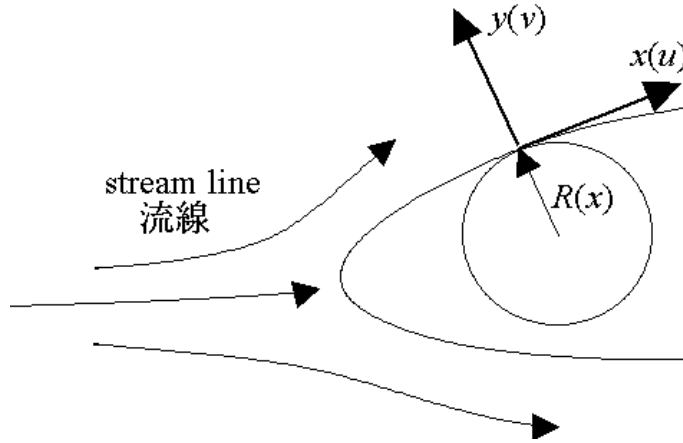


図 3.6: 物体表面に添う曲線座標

これらの方程式系 (連立方程式) は、放物型 (x 方向に上流から順番に下流方向に解が求められる) であるために、上流のある位置での解が初期条件として必要になる。

$$x = x_0 : \quad u = u(x_0, y) \tag{3.30}$$

また、 y 方向速度である v は連続の式より計算される。

3.2.4 曲線座標表示での方程式

これまでは、デカルト座標 (x, y) で方程式を記述してきたが、ここでは、局所的に物体表面に沿う曲線座標を使った方程式について紹介する。つまり、第 3.6 図を見れば分かるように、 x は物体表面に添う方向、 y は物体表面に垂直方向とする。また、 R は物体表面の曲率半径である。

x 方向の運動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R+y} \\ &= -\frac{R}{R+y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{R^2}{(R+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R+y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R+y)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2R}{(R+y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{R}{(R+y)^3} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{R}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} v + \frac{Ry}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

y 方向の運動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2R}{(R+y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R+y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + \frac{R^2}{(R+y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{(R+y)^2} + \frac{R}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} u + \frac{Ry}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \end{aligned} \tag{3.32}$$

連続の方程式

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{R+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R+y} = 0 \tag{3.33}$$

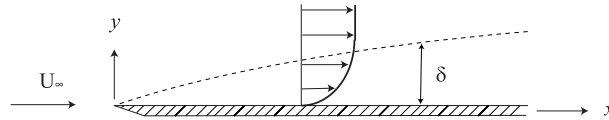


図 3.7: 平板境界層

ちなみに、圧縮性流における連続の方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{R}{R+y} \frac{\partial (u\rho)}{\partial x} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial y} + \frac{v\rho}{R+y} = 0 \quad (3.34)$$

となる。

これらの方程式は物体表面の曲率 (R) も考慮した方程式であるが、 R が大きくなると ($R \rightarrow \infty$ として上式を近似) 近似的にデカルト座標と同じ式になる。通常、境界層方程式はそんなに曲率が大きくない (つまり、曲率半径が大きい; 曲率とは曲率半径の逆数である) ところを扱うので、たとえ座標を翼表面に沿った形で設定しても、デカルト座標と同じ式を用いる事ができる。

問題 式 (3.31) から式 (3.34) までにおいて、曲率半径 R を大きくすると、これらの式はデカルト座標の式と一致することを確認せよ。

3.3 平板境界層

ここでは、一番簡単な境界層流れとして、 x 方向に圧力勾配の無い流れ、つまり、平板上の流れを考える。この流れは単純ではあるが、粘性流に関する種々の特性を勉強できる。

3.3.1 平板の境界層方程式

以下の理論は、ブラシウス (H. Blasius; 1908; Prandtl の最初の ph.D の学生) によって展開された。平板上の流れでは、圧力勾配は 0 となる。

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = 0} \quad (3.35)$$

これにより境界層方程式に圧力勾配の影響が入らない。つまり、外側のポテンシャル流れを解く必要がない。 ($U = U_\infty = const$ とすればよい) その結果、平板境界層の支配方程式は、以下のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.36)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.37)$$

また、これに対する境界条件は、

$$y = 0: \quad u = v = 0, \quad y \rightarrow \infty: \quad u = U_\infty \quad (3.38)$$

となる。

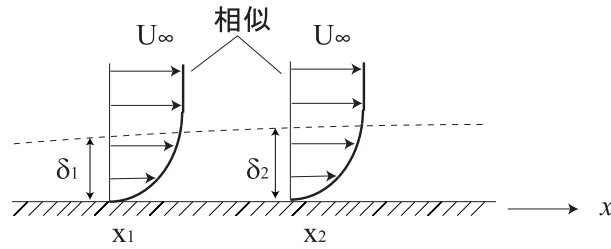


図 3.8: \$x\$ 方向速度成分 \$u\$ の \$y\$ 方向分布が \$x\$ 方向に相似

3.3.2 相似方程式

この問題は、主流方向（\$x\$ 方向）に基準となる長さが具体的に存在しないので、任意の \$x\$ での \$y\$ 方向速度分布は相似になると仮定される。自由流速度 \$U_\infty\$ と、境界層厚さ \$\delta(x)\$ を使用して、速度 \$u\$ を以下のように仮定する。

$$\frac{u}{U_\infty} = \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (3.39)$$

ここで、関数 \$\phi\$ は、主流方向の位置 \$x\$ が変化しても変わらない。

第 2 章のナビエ・ストークス方程式の厳密解のところ、突然動き出す平板上に生成される境界層について勉強した。その流れにおいて、渦度分布の厚さ（渦層の厚さ）を表す \$\delta\$ は、

$$\delta \sim \sqrt{\nu t} \quad (3.40)$$

のように時間とともに増大した。その流れは板が動いた場合であるが、ここで扱う流れは板は静止し、外側の流体が動く場合である。これらは、類推的に、お互いを対応させて考えることが可能である。これら 2 つの流れ（一つの流れは、時間 \$t\$ に関して、もう一つの流れは空間 \$x\$ に関して、渦度が集中した領域の幅が増大する）は、具体的には、以下の対応関係によって結びつけて考えることができる。

$$tU_\infty = x \quad (3.41)$$

これにより、時間的变化と空間的变化との間の換算が可能となる。

従って、式 (3.41) を使うことにより、平板上に生成される境界層の厚さ \$\delta\$ は

$$\delta \sim \sqrt{\nu t} \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (3.42)$$

になると考えられる。

式 (3.39) に含まれている \$\delta\$ に対して、式 (3.42) を使うと、相似変数 \$\eta\$ は、

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (3.43)$$

となる。

ここで、解析を容易にするために、流れ関数 \$\psi\$ を導入する。

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \quad (3.44)$$

ここで、\$f(\eta)\$ は無次元量である。ちなみに、流れ関数の定義は、連続の方程式を恒等的に満たすものとして、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.45)$$

である。

速度成分 u, v を (ξ, η) 座標で表す。 (x, y) 座標と (ξ, η) 座標の変換関係は、

$$\xi = x, \quad \eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (3.46)$$

であるので、鎖則 (chain rule) を使うと、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U_\infty} f'(\eta) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = U_\infty f'(\eta) \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} f(\eta) - \sqrt{\nu x U_\infty} f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (-f + \eta f') \end{aligned} \quad (3.48)$$

となる。ちなみに、 x, y 微分から ξ, η 微分への変換は、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{U_\infty}{\nu \xi} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (3.51)$$

である。

式 (3.47)~式 (3.51) を式 (3.37) に代入すると、 f に対する常微分方程式が得られる。

$$\boxed{f f'' + 2f''' = 0} \quad (3.52)$$

これはブラシウス (1908) の方程式 (*Blasius's equation*) と呼ばれる。

(問題) 式 (3.52) を誘導せよ。

境界条件は、式 (3.29) を変換して、式 (3.47), (3.48) より、以下のようになる。

$$y = 0 : u = 0, v = 0 \Rightarrow \boxed{\eta = 0 : f' = 0, f = 0} \quad (3.53)$$

$$y \rightarrow \infty : u = U_\infty \Rightarrow \boxed{\eta \rightarrow \infty : f' = 1} \quad (3.54)$$

この方程式は、解析的な解は得ることが出来ず、第2章で述べた数値的な方法で解くことができる。

(問題) 式 (3.52) を数値的な方法で解きなさい。ヒント：式 (2.165) を使用。

3.3.3 Blasius 方程式の数値解

ここで、以下に Blasius 方程式 (3.52) の数値解を紹介する。表 (3.1) を参照されたい。

この流れの特徴は、 η が 0 付近で、速度分布 $u(y)$ の曲率が小さい (つまり、曲率半径が大きく、直線的となる) ことである。(3.37) より明らかなように、壁では、 $\partial^2 u / \partial^2 y = 0$, $\partial^2 u / \partial \eta^2 = 0$ となる。

表 3.1: ブラシウス方程式の数値解

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''	$\eta f' - f$
0.0	0	0	0.3321	0
1.0	0.1656	0.3298	0.3230	0.1642
2.0	0.6500	0.6298	0.2668	0.6095
3.0	1.397	0.8461	0.1614	1.141
4.0	2.306	0.9555	0.0642	1.516
5.0	3.283	0.9915	0.0159	1.674
6.0	4.280	0.9990	0.0024	1.714
7.0	5.279	0.9999	0.0002	1.720
8.0	6.279	1.0000	0.0000	1.721

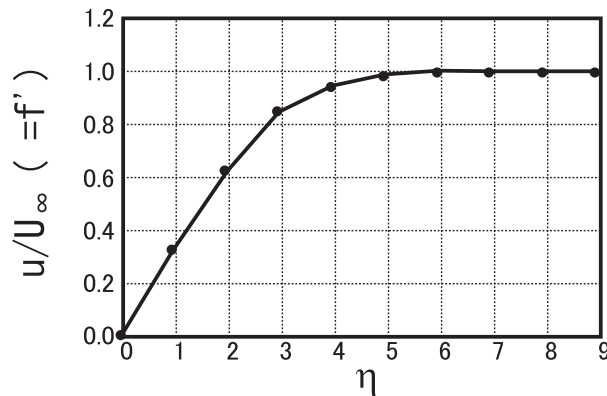


図 3.9: 平板境界層の速度分布

また、この計算結果で特に注意したいことは、 y 方向速度成分 v が境界層の縁で、つまり、 $y = \delta$ で 0 でないことである。この速度は式 (3.48) より、

$$v_\infty = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}(-f + \eta f')_\infty \tag{3.55}$$

となる。上述の数値解の表 3.1 より、 η が大きいところでは、

$$-f + \eta f' = 1.72 \tag{3.56}$$

であるので、結局、 v_∞ は

$$\frac{v_\infty}{U_\infty} = 0.86\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} \tag{3.57}$$

となる。つまり、0 ではない。これは、境界層内で x 方向に減速された流れが、その分外側に (y 方向に) 押しやられるためである。

(参考) 乱流の場合、乱れることによって流れの混合が促進され (混合促進は乱流の良い面)、より速い流れが壁近くまで存在するようになる (速度勾配が増加し摩擦抵抗が増加するのは乱流の悪い面)。

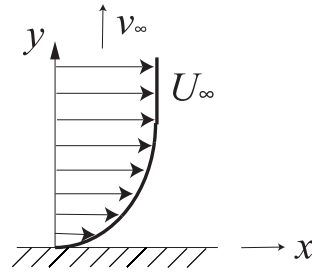
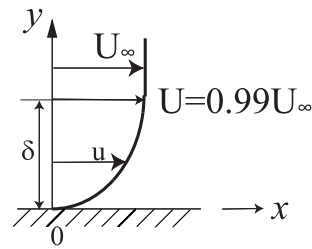
図 3.10: 境界層端で y 方向速度成分 v_∞ が発生

図 3.11: 99%境界層厚さ

乱流の場合の速度境界層の速度分布として、一番簡単な近似式は、1/7 乗則 (one-seventh power law) である。

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (3.58)$$

(参考了)

3.4 境界層厚さ

境界層の厚さ (Boundary layer thickness) を見積もるのは重要である。なぜなら、この厚さから、粘性効果のいろいろな特徴が分かるからである。しかし、境界層厚さそのものを厳密に定義するのは困難である。以下に良く使われる境界層厚さの定義を紹介する。

3.4.1 99%境界層厚さ

これは、境界層の厚さそのものを表そうとするものである。壁から外側の速度 (ポテンシャル流の速度) U_∞ の 99% の値をとる位置までの長さとして定義する。通常、 δ の記号が使われる ($\delta = \delta_{99}$)、

$$u = 0.99U_\infty \quad (3.59)$$

第 3.3.3 項で示された計算結果を利用すると、これは、

$$\eta \simeq 5.0 \quad (3.60)$$

に相当する。従って、式 (3.43) より、

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = 5 \quad (3.61)$$

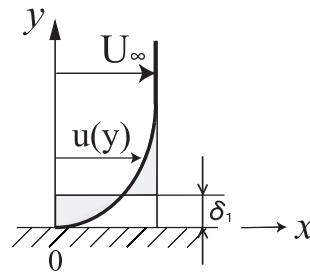


図 3.12: 排除厚さ

つまり、このときの y はここで定義された境界層厚さ δ_{99} となるので

$$\delta_{99} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (3.62)$$

となる（境界層厚さ δ_{99} は、式 (3.43) の特性厚さ δ と係数倍だけ異なることに注意）。式 (3.62) は境界層厚さの目安として頻繁に使われる（ただし、実験や数値シミュレーション結果からこの δ を求めてプロットすると時にはがたがたした形状になる）。これを無次元化して、レイノルズ数の形に書きかえると

$$Re_\delta = 5.0Re_x^{1/2} \quad (3.63)$$

となる。ここで、 Re_δ は境界層厚さ δ に基づいたレイノルズ数で、 Re_x は主流方向の位置 x に基づいたレイノルズ数である。

$$Re_\delta = \frac{U_\infty \delta}{\nu}, \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (3.64)$$

ちなみに、乱流では

$$Re_\delta = 0.14Re_x^{6/7}, \quad \text{あるいは} \quad Re_\delta = 0.37Re_x^{4/5} \quad (3.65)$$

などの関係式が使われる。 Re_x の指数は 1 に近い値をとる。層流では指数は 1/2 であるので、乱流の方が境界層は厚くなる。

(問題) 風速 30m/s で、板の長さが 5m の平板の後縁での境界層厚さを層流と乱流の場合でそれぞれ求めよ。

3.4.2 排除厚さ

もう一つの定義は排除厚さ (displacement thickness) である。これは δ_1 や δ^* で表される。本来、ポテンシャル流の速度 U があるべきところが、粘性により速度 $u (< U)$ に減少したために、流れが外側に押しやられる、あるいは排除された形になる。つまり、その分、物体表面が外側に出っ張ることに等価である。この排除された量は以下のように、横軸を一樣流の速度とした場合、どのくらいの高さに相当するかを、換算して定義する。

$$U_\infty \delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} (U_\infty - u) dy \quad (3.66)$$

従って、排除厚さ δ_1 は

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (3.67)$$

となる。

ここで、第3.3節で述べた平板まわりの流れ (Blasius の解) で得られた量を代入して排除厚さを計算する。式 (3.43)、式 (3.47) より、

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_{y=0}^{\infty} (1 - f') \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} [\eta - f]_0^{\eta_1} \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} (\eta_1 - f(\eta_1)) \end{aligned} \quad (3.68)$$

となる。積分範囲を無限大 (∞) までとるのは現実的でないので、ある程度大きな値である η_1 に置き換えている。境界層外縁を表すこの η_1 として、表 (3.1) の数値計算結果から、 $\eta_1 = 5$ を適用すると、

$$\boxed{\delta_1 = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} \quad (3.69)$$

となる。これを無次元化すると

$$Re_{\delta_1} = 1.72 Re_x^{1/2} \quad (3.70)$$

式 (3.62) と式 (3.69) を比較すると、排除厚さ δ_1 は境界層厚さ δ の約 $1/3$ になっている。厳密には、

$$\frac{\delta_1}{\delta} = 0.34 \quad (\text{層流の場合}) \quad (3.71)$$

である。乱流の場合には、

$$\frac{\delta_1}{\delta} = 1/8 = 0.13 \quad (\text{乱流の場合}) \quad (3.72)$$

となる。ここでは、乱流の速度分布として、 $1/7$ 乗則 (式 (3.58)) を利用して式 (3.67) に代入して計算している。

ちなみに、表面がスムーズではなく、突起等ラフネス (roughness) がある場合には、その高さが排除厚さ以下であれば、ラフネスによる摩擦抵抗の増加は大きくない。逆に、突起物が存在するような場合には、その高さを排除厚さ以下に抑えるべきである。

3.4.3 運動量厚さ

さらに、境界層の厚さの定義式として、運動量厚さ (momentum thickness) がよく使われる。これは、通常、 δ_2 、あるいは、 θ で表される。運動量厚さは、ポテンシャル流れに対する運動量の損失を意味する。その定義は

$$\rho U_\infty^2 \delta_2 = \rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_\infty - u) dy \quad (3.73)$$

である。ここで、右辺の被積分関数の最初の量が U_∞ ではなくて、 u であることに注意する必要がある。左辺は、もしポテンシャル流れが壁まで存在していると考えた場合、失われた運動量が、一様流の

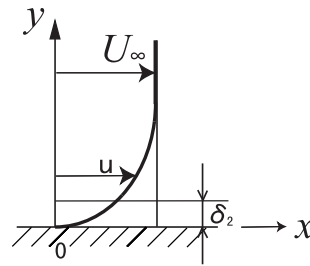


図 3.13: 運動量厚さ

運動量に換算してどのくらいの量になるかを、高さ δ_2 で表している。この式を変形すると、運動量厚さ $\theta = \delta_2$ は

$$\begin{aligned}\theta = \delta_2 &= \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \\ &= \int_{\eta=0}^{\infty} f'(1-f') \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} d\eta\end{aligned}\quad (3.74)$$

となる。

積分範囲の無限大を $\eta = 5$ までとして、Blasius 方程式の数値解を利用して、 f' の値を代入して上式を数値計算する。その結果、運動量厚さ θ は

$$\theta = \delta_2 = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}\quad (3.75)$$

となる。無次元化すると

$$Re_{\theta} = 0.664 Re_x^{1/2}\quad (3.76)$$

となる。運動量厚さも、排除厚さの約 $1/3$ になっていることに注意。

(参考) 層流と乱流の場合について整理すると、以下のようになる。

- 境界層厚さ

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad (\text{層流}), \quad \frac{\delta}{x} = \frac{0.371}{Re_x^{1/5}} \quad (\text{乱流})\quad (3.77)$$

- 排除厚さ

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}} \quad (\text{層流}), \quad \frac{\delta^*}{x} = \frac{0.046}{Re_x^{1/5}} \quad (\text{乱流})\quad (3.78)$$

- 運動量厚さ

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (\text{層流}), \quad \frac{\theta}{x} = \frac{0.036}{Re_x^{1/5}} \quad (\text{乱流})\quad (3.79)$$

ここで、 Re_x は、 x に基づくレイノルズ数で、 $Re_x = U_{\infty} x / \nu$ で定義される。

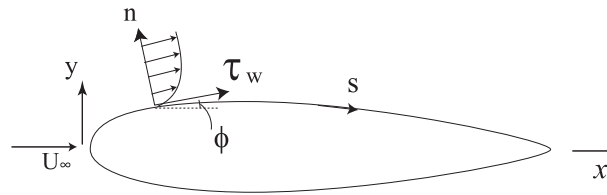


図 3.14: 物体表面に作用する摩擦応力

3.4.4 形状係数

排除厚さ δ_1 を運動量厚さ δ_2 で割ったものを形状係数 H (*shape factor*) と呼ぶ。

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta_1}{\theta} = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (3.80)$$

この係数は境界層の中の速度分布の形状に関する。平板境界層に対する形状係数の値は

- 層流平板境界層では、 $H = 2.59$
- 乱流平板境界層では、 $H = 1.4$ (あるいは $H = 1.3$)

となる。

形状係数はその値が大きくなると剥離を起こす前兆となる。形状係数が大きい流れとは、運動量の損失を表す高さに比べて、相対的に排除厚さが増大する場合である。 H は逆圧力勾配 (adverse pressure gradient; 流れ方向に圧力が増大する) が大きくなればなるほど大きくなる。以下の値に達すると剥離が起こると予測されている。

- 層流では、 $H = 3.5$
- 乱流では、 $H = 2.4$

つまり、平板上の流れでは、剥離は生じないことが確認できる。

3.5 摩擦力

粘性により物体に作用する力を摩擦力 (skin friction) と呼ぶ。これは、物体表面で速度がゼロになることにより速度分布に歪みが生じ、その結果生じる力である。例えば、パイプ内を流体を流すときに抵抗が発生する現象であり、また、外部流としては、飛行機が空中を飛ぶときに、翼や胴体に発生する抵抗の一部となる (摩擦抵抗)。この抵抗に打ち勝ち、流体を流し続けるためには、パイプ内の流れではポンプあるいはファンが、また、飛行機ではジェットエンジンなどによる推力が必要となる。どちらの場合も、流体と物体表面に作用する抵抗は小さい方が、ポンプ、ファン、ジェットエンジンなどが小さいもので済み、エネルギー節約のために好ましい。

ちなみに、摩擦力は物体表面に接する方向に作用する力である。これに対して、圧力は表面に垂直方向に作用する力である。

3.5.1 局所摩擦係数

壁でのせん断応力 (shearing stress、あるいは frictional stress) は、以下の式により定義される。

$$\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.81)$$

ここでの座標 y は、壁に垂直な方向の座標で、壁の曲率が小さいときにはこのような近似が可能である。これが、物体表面の局所で働き、場所によってその値が異なる摩擦係数 (frictional stress) である。

第 3.3 節で述べた平板まわりの流れの場合には、Blasius の解を上式に代入すると、平板流れに対する局所摩擦係数は

$$\tau_w(x) = \mu \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} U_\infty f'(\eta) \right)_{\eta=0} \quad (3.82)$$

$$= \alpha \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (3.83)$$

となる。ここで、表 (3.1) の数値計算結果より、

$$\alpha = f''(0) = 0.33 \quad (3.84)$$

である。平板の前縁から下流側に遠ざかるほど摩擦係数は減少していく。

3.5.2 局所摩擦係数

式 (3.83) の摩擦係数を無次元化すると、平板流れに対する無次元局所摩擦係数 C_f が得られる。

$$C_f = \frac{\tau_w(x)}{\rho U_\infty^2 / 2} = \alpha \nu \frac{2}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = 0.66 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} \quad (3.85)$$

となる。先に定義した、 x レイノルズ数 $Re_x (\equiv U_\infty x / \nu)$ を使用すると、

$$\boxed{C_f = \frac{0.66}{\sqrt{Re_x}}} \quad (3.86)$$

と書ける。これを見ると、局所せん断力係数 C_f は、 x レイノルズ数の平方根に反比例することが分かる。

ちなみに、乱流境界層では、局所摩擦係数は

$$C_f = \frac{0.0576}{Re_x^{1/5}} \quad (3.87)$$

となる。さらに、層流から乱流へ遷移する領域では、

$$C_f = \frac{0.0576}{Re_x^{1/5}} - \frac{A}{Re_x}, \quad A = Re_{x,cr} (C_{f,turbulent} - C_{f,laminar}) \quad (3.88)$$

と近似される。ここで、 $Re_{x,cr}$ は、臨界レイノルズ数である。

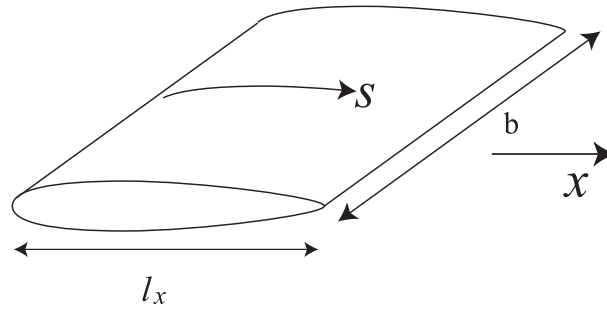


図 3.15: 摩擦抵抗が作用する 3 次元物体

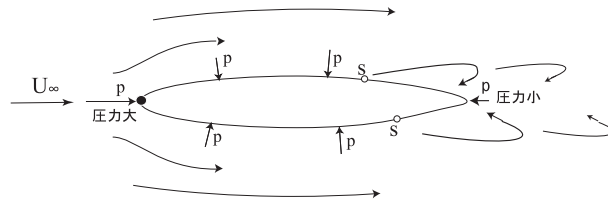


図 3.16: 圧力抵抗

3.5.3 摩擦抵抗

摩擦力により物体全体に掛かる粘性抵抗 D_f (viscous drag) は、摩擦応力を物体表面全体にわたり積分することによって得られる。

$$D_f = b \int_{s=0}^l \tau_w \cos \phi \, ds \quad (3.89)$$

ここで、 b はスパン方向の幅を、 l は表面に沿う長さを表す。また、 ϕ は物体表面の接線ベクトルと x 軸 (主流方向) のなす角度である。 s を表面に沿う方向とすれば、

$$\cos \phi \, ds = dx \quad (3.90)$$

より、 D_f は

$$D_f = b \int_{s=0}^{l_x} \tau_w \, dx = b\mu \int_{x=0}^{l_x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \, dx \quad (3.91)$$

となる。ここで、 l_x は x 軸方向の物体の長さである (表面に沿う長さではない)。

一般的には、物体にはこれらの粘性抵抗のほかに、剥離などによる圧力抵抗が生じる。これらの形状に依存する抵抗を形状抵抗 (profile drag) と呼ぶ。もし、流れがポテンシャル流れであれば、一様流 \vec{U}_∞ 方向の力、つまり、抗力は 0 になる。これをダランベールの背理 (d'Alembert's paradox) と呼ぶ。これに関しては、テキスト「非圧縮性流体力学」の第 5 章を勉強されたい。

2次元平板に作用する摩擦抵抗力 D_f は、(3.91),(3.83) より、

$$\begin{aligned} D &= b \int_{x=0}^l \tau_w \, dx \\ &= b \int_{x=0}^l \alpha \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \, dx \\ &= 2b\alpha \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} l \end{aligned} \quad (3.92)$$

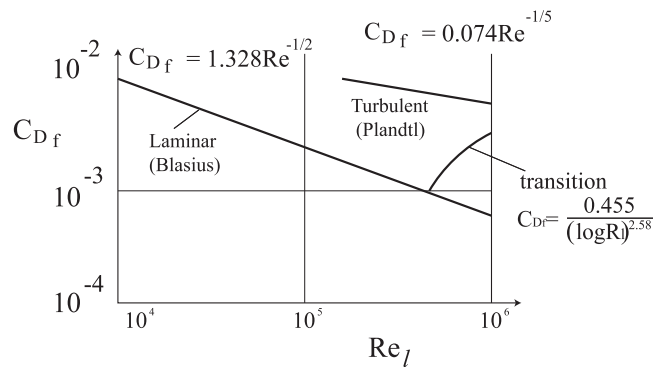


図 3.17: 平板の摩擦抵抗係数

となる。もし、平板の両面（上面と下面）に掛かる摩擦力を考慮するならば，

$$2D = 4b\alpha\sqrt{\rho\mu U_\infty^3 l} = 1.328b\sqrt{U_\infty^3 \mu \rho l} \tag{3.93}$$

となる。

ここで、これらの式から、平板の摩擦抗力 D_f に関して以下の特徴が得られる。

- 摩擦抗力 D_f は，
 - － 速度に関して、 $U_\infty^{3/2}$ に比例する。
 - － 長さに関して、 $l^{1/2}$ に比例する。
 - － 粘性係数に関して、 $\mu^{1/2}$ に比例する。
 - － 密度に関して、 $\rho^{1/2}$ に比例する。
- $l^{1/2}$ に比例することから，短い板ほど相対的に摩擦抵抗は大きくなる。下流部では境界層が厚く，その分、壁での速度勾配が小さくなるために、壁に作用するせん断力が弱まる。

3.5.4 摩擦抵抗係数 C_{Df}

摩擦抵抗 D を無次元化すると、一般性が生じ、種々の物体の抵抗を比較するのに便利である。これを摩擦抵抗係数と呼び、以下のように定義される。

$$C_{Df} = \frac{2D_f}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \cdot S} \tag{3.94}$$

ここで、 $(1/2)\rho U_\infty^2$ は動圧である。（動圧は単位体積の流体の運動エネルギーであるとも解釈できる）。また、 S は濡れ面積（wetted surface area）と呼ばれ、流体が物体に接触する面積である。

平板の流れでは、上面と下面が流れに接触している場合、面積 S は

$$S = 2bl \tag{3.95}$$

となる。

平板に対して求めた摩擦抵抗 D_f である式 (3.93) を式 (3.94) に代入すると、抵抗係数は、

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \tag{3.96}$$

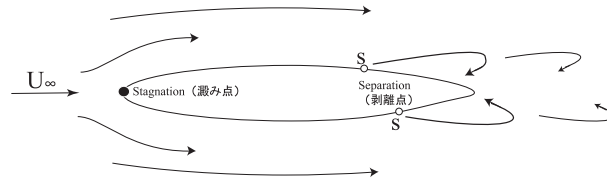


図 3.18: 物体表面からの剥離現象

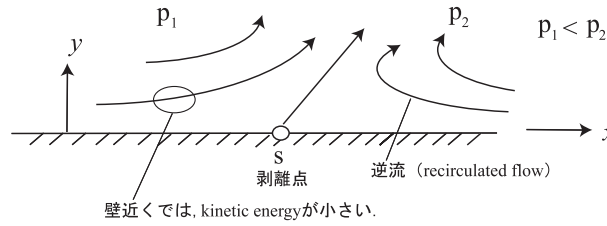


図 3.19: 剥離点近傍の流れ模様

となる。つまり、板の長さに基づいたレイノルズ数 Re_l の平方根に反比例する。抵抗係数は、板が長いほど小さくなる。

式 (3.96) は、 $Re_l < 5 \times 10^5 \sim 10^6$ の範囲で成立する。 Re_l がそれ以上大きくなると、流れは乱流となり、摩擦抵抗係数は増大する。

(参考) 乱流の場合の摩擦抵抗係数は、解析的には得ることができず、経験式となる。例えば、

$$C_{Df} = \frac{0.074}{Re^{1/5}} \tag{3.97}$$

などがある。

また、乱流で、かつ圧縮性の影響を考慮した摩擦抵抗係数の式として、

$$C_{Df} = \frac{0.455}{(\log_{10} Re)^{2.58} (1 + 0.144M^2)^{0.65}} \tag{3.98}$$

などがある。この式を見ると、マッハ数 M が大きくなるにつれ、摩擦抵抗係数は減少する。つまり、圧縮性は摩擦抵抗係数を減らす方向に作用する。(了)

3.6 境界層の剥離

ここでは、剥離現象 (あるいは剥離 : separation) について勉強する。これは流体力学において大変重要な現象である。境界層は通常剥離を生じていくつかの悪い作用を及ぼす。例えば、抵抗を増大させる。逆圧力勾配 (adverse pressure gradient) ($dp/dx > 0$) の状態、つまり、流れ方向に圧力が增大する場合には、流体はいつまでも壁に沿って流れることは不可能となる。本来、境界層内の流れは粘性により減速しているために、運動エネルギーが小さくなっている。つまり、外から大きな力が掛かると耐え切れないほど弱い流れになっている。具体的には、流れる方向に圧力が上昇して流れを止めようとする力が作用したとき、もはや流れは物体に沿って流れることができず、物体から離れざるを得なくなる。これが剥離現象である。

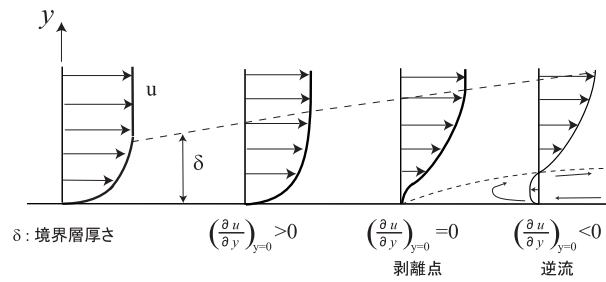


図 3.20: 剥離点近傍の速度分布

3.6.1 剥離点

ここでは、まず剥離点を定義しよう。以下のように定義される。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (3.99)$$

つまり、物体表面から垂直方向に、主流方向 u の速度勾配がゼロになるところである。別の言い方をすれば、せん断力 τ がゼロになるところである。

剥離が実際に物体表面上のどこで起きるかは、境界層方程式を解いてみないと分からない。そのとき、上流からマーチングして計算していき、境界層方程式が解けなくなったところ、より正確には、その付近に剥離点が存在する可能性がある。つまり、一般的に境界層方程式は剥離点の近くまでしか計算できない。なぜならば、剥離点付近では境界層近似が成立しなくなるためである。つまり、剥離点付近では境界層が厚くなり、もはや境界層近似、言いかえれば、

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.100)$$

が成立しなくなる。主流方向 (x 方向) の変化も大きくなる。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.101)$$

となる。この場合には、ナビエ・ストークス方程式を解く必要がある。

3.6.2 圧力勾配と剥離との関係

剥離は常に減速流において起こる。つまり、式 (3.19) より、

$$\frac{dp}{dx} > 0 \quad (3.102)$$

の流れである。

式 (3.28) より、 $y = 0$ (壁面上) では、

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx} \quad (3.103)$$

となる。これは一つの大事な性質である。

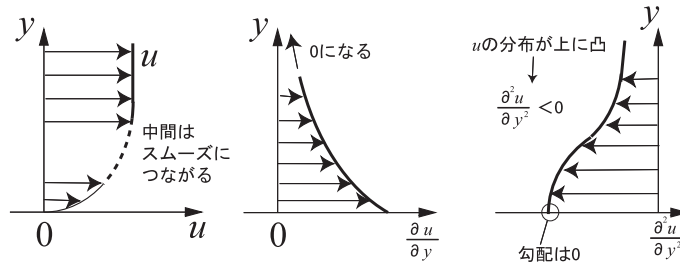


図 3.21: 物体表面に沿って加速流の場合

また、もう一つの性質として、運動方程式 (3.28) を y で微分する。

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \quad (3.104)$$

となる。この式で、 $y \rightarrow 0$ にする。そのとき、

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.105)$$

を式 (3.104) に代入すると、次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0 \quad (3.106)$$

つまり、 u の 2 階微分 $\partial^2 u / \partial y^2$ の勾配は壁で 0 になる。

式 (3.103) より、壁のところでの速度分布の曲率は、圧力勾配にのみ依存する事が分かる。

- 逆圧力勾配 (adverse pressure gradient) のとき

$$\frac{dp}{dx} > 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} > 0 \quad (3.107)$$

- 順圧力勾配 (favorable pressure gradient) のとき

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0 \quad (3.108)$$

- 圧力勾配がないとき、

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (3.109)$$

となる。圧力勾配が無いときには (つまり、平板流)、速度分布の曲率半径は無限大になる、つまり、直線的な分布になる。これに関しては、図 (3.9) を参照のこと。

以上の特徴を図的にまとめると、

- 加速流 ($\partial p / \partial x < 0$) の場合は第 3.21 図になる。
- 減速流 ($\partial p / \partial x > 0$) の場合は第 3.22 図になる。

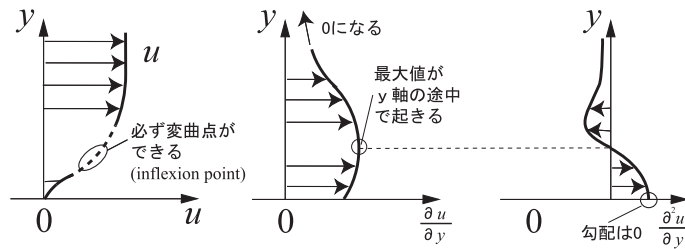


図 3.22: 物体表面に沿って減速流の場合

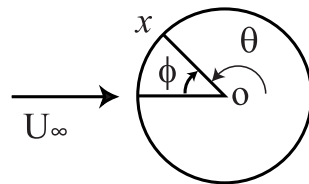


図 3.23: 円柱表面を表す座標

第 3.21 図と第 3.22 図を比較すると、境界層が剥離するときは壁面上で $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ となるから、 $\frac{dp}{dx} > 0$ 、つまり第 3.22 図の場合のみ剥離が起こる可能性がある。

外部流の例として、この後、円柱周りの流れについて述べるが、内部流の例として、ダクトの中の流れが考えられる。

- 縮流筒では、流れが加速し、圧力勾配が主流方向に負となり、剥離現象は生じない
- 拡散筒では、圧力勾配が主流方向に正となり、剥離が生じる可能性が大である。拡がり角を大きくすると、剥離が生じ、総圧損失が増大する。

[参考] 航空宇宙機の翼などにおいては、流れの速度が速くなって、局所的に超音速になると、その下流で衝撃波が発生する。流れが衝撃波を横切ると、圧力が増加するために、この圧力上昇がそこで境界層内を浸透していき、翼表面に到達する。境界層内はおおよそ亜音速であるために、この圧力が上がったという擾乱情報は境界層内を上流に伝わっていく。この結果、境界層内では、圧力勾配が正となり ($dp/dx > 0$)、逆圧力勾配の結果、境界層が剥離する。層流の場合には、この剥離がはなばなく現れ、 λ 型衝撃波が剥離点より発生する。一方、乱流では、この剥離現象が小さめにおさえられる。

3.6.3 円柱まわりの剥離

円柱は単純な形状をしているので、むかしから 2 次元問題として良く研究されている。円柱まわりの剥離に関して、以下の有名な図 3.24 を示す。横軸の θ は、円柱の前縁からの角度である。この図では、比較のために、ポテンシャル流の圧力分布が示されている。これは、

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (3.110)$$

で表される。

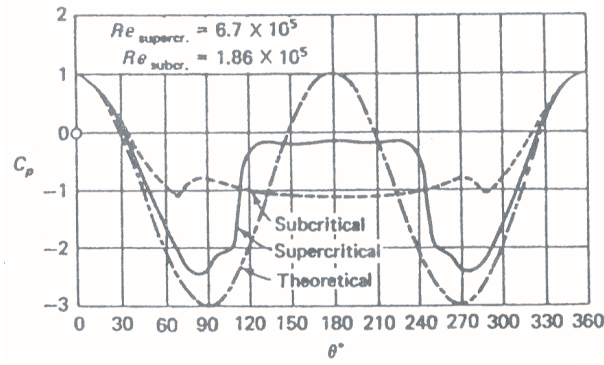


図 3.24: 円柱周りの圧力分布

subcritical : 流れが層流剥離

supercritical : 流れが乱流剥離

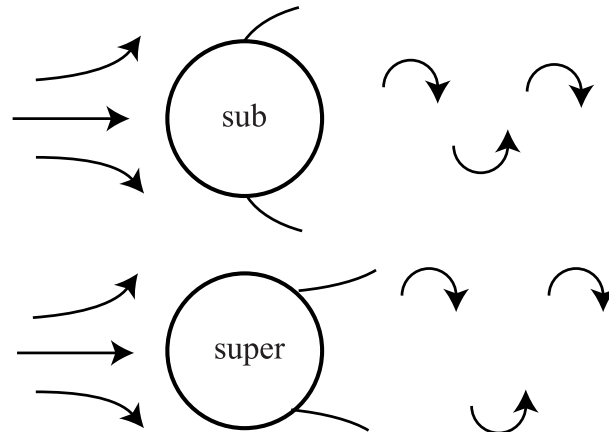


図 3.25: 亜臨界流れと超臨界流れ

粘性のある実際の流れでは、ポテンシャル流の場合のように円柱表面に沿ったまま付着して流れることはできない。それはここで述べたように流れ方向に圧力勾配が存在するからである。また、剥離する場合でも、その剥がれ方は、流れが層流と乱流では異なってくる。層流の場合、図 3.25 で示すように、亜臨界 (subcritical) の状態では、より上流側の表面で剥がれてしまう。一方、乱流になると、つまり、超臨界 (supercritical) の場合にはより下流側まで剥がれずに持続し、その後剥がれる。これらは、表面に作用する圧力を積分すると、結果として抵抗が違ってくる。これが圧力抵抗 (pressure drag) である。つまり、層流では抵抗は大きく、乱流では小さい。このちょうど変わり目を、あるいは、臨界 (critical) 状態を抵抗急変 (drag crisis) と呼ぶ。乱流になると、流れが下流側まで物体表面に付着し、その結果圧力回復が生じ、後ろから押ししてくれる力の成分が増えることになる。これにより抵抗は減少する。

図 3.24 から分かるように、亜臨界状態では、ベース圧力 (物体後ろ側の圧力) の圧力係数が $C_p = -1$ 程度に減少し、超臨界状態では、ベース圧力の圧力係数が $C_p = 0$ ぐらいに上昇する。この分、後ろから押し返す力が増大する。ちなみに、ポテンシャル流では、後縁で滞点となり、そこでは圧力係数が $C_p = +1$ になる。

円柱周りのポテンシャル流れを展開すると以下ようになる。

$$\frac{U}{U_\infty} = 2 \sin x = 2x - 0.333x^3 + 0.0167x^5 + \dots \quad (3.111)$$

ここで、 x は円柱表面に沿う無次元長さ (半径を R 、前縁からの角度を ϕ とすれば $x = \phi = \bar{x}/R$ 、 \bar{x} は表面に沿う実際の長さ)、 U は物体表面に沿うポテンシャル流の速度である。この速度分布を使って剥離点を予測すると $\phi = 104 \sim 110^\circ$ になる。実際の流れでは、円柱表面で剥離が生じているため、外側のポテンシャル流は、式 (3.111) で述べた流れと異なっている。Hiemenz(1911) によれば、剥離を考慮したポテンシャル流の速度は

$$\frac{U}{U_\infty} = 1.814x - 0.271x^3 - 0.0471x^5 + \dots \quad (3.112)$$

となる。この流れの最大速度は $\phi = 71.2^\circ$ のときに生じ、その速度は $1.595U_\infty$ である。このポテンシャル流を基に、境界層方程式を解き、剥離点位置を求めると、おおよそ $\phi = 80^\circ$ となる。

層流剥離点に関しては、Stratford の予測理論がある。

$$(x - x_B)^2 C_p \left(\frac{dC_p}{dx} \right)^2 \simeq 0.0104 \quad (3.113)$$

ここで、 x_B は仮想原点で、Thwaites の近似式によれば

$$x_B \simeq x_0 - \int_0^{x_0} \left(\frac{U}{U_{max}} \right)^5 dx \quad (3.114)$$

となる。ここで、 x_0 は圧力が最小となる位置である。以上の関係式を使って円柱周りの剥離点を計算すると、

$$x_B = 0.8606, \quad \phi_{sep} = 79.8^\circ \quad (3.115)$$

となる。 ϕ_{sep} は剥離 (separation) が生じる角度である。

3.7 空力係数

ポテンシャル流れでは、抵抗は全く生じない。これが有名な D'Alembert の背理である (これに関しては、テキスト「非圧縮性流体力学」の第 5 章参照)。ところが、ここで扱う実際的な流れである粘性流では、1) 物体表面には摩擦力が、また、その結果、2) 流れの剥離という現象が発生する。その結果、物体が摩擦による力と剥離による力を被ると、物体には抵抗あるいは抗力が働くことになる。流体が空気の場合に、物体が受ける力を空気力 (aerodynamic force) と呼ぶ。空気力には 6 個の成分、つまり、六分力がある。具体的には、揚力 (lift)、抗力 (drag)、横力 (side force)、縦揺れモーメント (pitching moment)、横揺れモーメント (rolling moment)、偏揺れモーメント (yawing moment) である。このうち、揚力、抗力、縦揺れモーメントの 3 つを縦 3 分力という。これらの空気力を無次元化したものが空力係数 (aerodynamic coefficient) である。

3.7.1 揚力と抗力の定義

揚力 (lift) と抗力 (drag) は以下のように定義される。

- 揚力とは：一様流 \vec{U}_∞ に垂直方向に働く空気力
- 抗力とは：一様流 \vec{U}_∞ の方向に働く空気力

ここで、一様流とは、物体が飛行する速度ベクトルと逆向きの速度ベクトルを持つ流れである。つまり、飛行する物体に乗って見たとき、物体には前方からこの一様流が流れて来るように見える。

3.7.2 空力係数

空気を無次元化したもので、空気を受ける物体を設計するときに大事な量である。ここでは以下の三分力の係数について記す。

- 揚力係数 C_L

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} \quad (3.116)$$

- 抗力係数 C_D

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S} \quad (3.117)$$

- ピッチングモーメント係数 C_M

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 S l} \quad (3.118)$$

ここで、 L は揚力、 D は抗力、 M はモーメント（あるいはピッチングモーメント）、 S は基準面積、 l は基準長さである。ちなみに、 $(1/2)\rho_\infty U_\infty^2$ は動圧である。 C_l (添え字小文字 l) はローリングモーメントを表すのに使うので、混乱しないように注意が必要。

3.7.3 相似則

一般に、 C_L 、 C_D は Reynolds 数の関数である ($C_L = C_L(Re)$, $C_D = C_D(Re)$)。本来、物体の大きさや速度を変えると異なる値になるものが、あるパラメータを使うことにより、そのパラメータのみの関数で表されることを相似 (similarity) であるという。ちなみに、速度が上がり圧縮性が入ってくると、もう一つのパラメータであるマッハ数 M (流速/音速) の関数にもなる。つまり、そのときには、揚力係数は $C_L = f(Re, M)$ 、抵抗係数は $C_D = g(Re, M)$ 、モーメント係数は $C_M = h(Re, M)$ となる。

抵抗係数の相似性を示す代表的な例が、以下に述べる円柱と球の場合である。

円柱の場合

第 3.26 図には円柱の場合の実験結果が表されている。レイノルズ数が小さいところでは C_D は大きく、レイノルズ数が増加するにつれて抵抗係数 C_D は減少する。 $Re = 10^3$ のところでおおよそ $C_D = 1$ となり、レイノルズ数が 10^3 後半から 10^5 にかけて $C_D = 1.2$ の値をとる。その後、 $Re = 3 \times 10^5$ 辺りで急激に抵抗が減少する。この現象を抵抗激変 (drag crisis) と呼ぶ。これは、流れが乱流に遷移し、円柱から流れが剥離する位置 ϕ_{sep} が下流側にシフトするためである。より厳密に言えば、層流せん断層が乱流に遷移し、円柱表面に再付着し、剥離泡が形成される。この場合には流体が物体に沿って流れた分、圧力回復があり、後ろから物体を押し返してくれるためである。この抵抗激変の後、ゆっくりと抵抗は増加していく。レイノルズ数がさらに大きくなるとどうなるかは定かではない。(参考：ここで示した結果は、表面がスムーズな場合である。表面がでこぼこしている場合、抵抗激変のレイノルズ数は、小さい方にシフトする。後述する球の場合でも同じである。野球のボールは、縫い目があるので、その分、抵抗激変は、より低いレイノルズ数で起こる。)

(参考) ストローハル数

円柱の後ろの流れは振動する。この振動数 f を無次元パラメータであるストローハル数 (Strouhal number) St で表す。

$$St = \frac{fD}{U_\infty} \quad (3.119)$$

ここで、 D は円柱の直径、 U_∞ は一様流の速度である。円柱周りの流れの場合、ストローハル数は、約 $St = 0.2$ の値を取る。(了)

$Re \leq 1$ 辺りで有効な式として、Oseen-Lamb の式がある。

$$C_D = \frac{8\pi}{Re[0.5 - \gamma + \ln(8/Re)]} \quad (3.120)$$

ここで、 γ はオイラー定数で、 $\gamma = 0.577216$ である。ちなみに、もう少し大きいレイノルズ数まで適用できる近似式として

$$C_D \simeq 1 + 10.0Re^{-2/3} \quad (3.121)$$

がある。

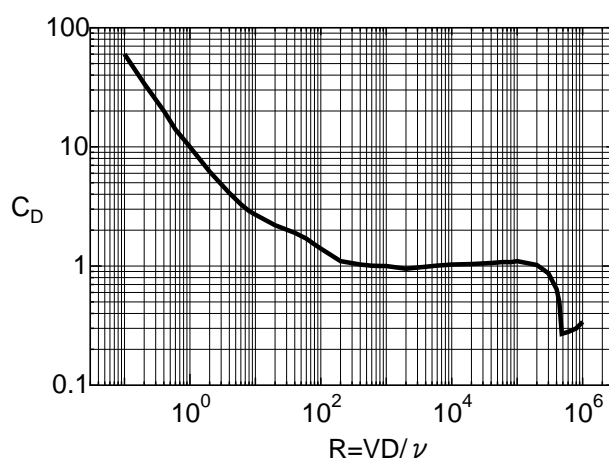


図 3.26: 円柱の場合の抵抗係数

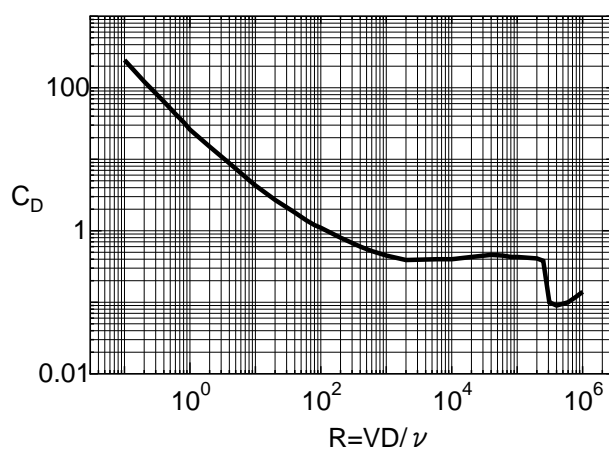


図 3.27: 球の場合の抵抗係数

球の場合

一方、球の場合を第 3.27 図に示す。円柱と同じくレイノルズ数の小さいところでは C_D が大きい。

レイノルズ数の増加とともに C_D は減少し、レイノルズ数が $10^3 \sim 10^4$ では $C_D = 0.4$ である。その後、レイノルズ数と共に多少 C_D は増加するが、また、0.4 ぐらいに戻る。 $Re = 3 \times 10^5$ 辺りで乱流に遷移することにより抵抗激変 (drag crisis) が起こり、 $C_D = 0.09$ ぐらいまでに減少する。その後、レイノルズ数が増加するとともに緩やかに増加する。レイノルズ数がさらに大きくなるとどうなるかは定かではない。

$Re \leq 1$ の場合はストークス (Stokes) の公式が使用できる。そこでは、球の抵抗 D は

$$D = 6\pi\mu RV_\infty \quad (3.122)$$

と表される。ここで、 R は球の半径、 μ は粘性係数である。これを無次元化すると抵抗係数 C_D が得られる。

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{24}{Re} \quad (3.123)$$

ただし、レイノルズ数は $Re = \rho 2RV_\infty / \mu$ で定義される。

(注) Stokes 近似: Stokes 近似の式は以下のように与えられる。運動方程式は

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (3.124)$$

非圧縮性流であれば、

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.125)$$

であるので、運動方程式に微分演算子である $\nabla \cdot$ を施すと、圧力に対する方程式が得られる。

$$\Delta p = 0 \quad (3.126)$$

ちなみに、渦度ベクトル $\vec{\omega}$ に対する方程式は、

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (3.127)$$

となる。つまり、拡散方程式になる。

(注) 終わり

さらに、レイノルズ数を高めて近似させるのは Oseen 近似である。

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln Re \dots \right] \quad (3.128)$$

Stokes の解では対流項を無視しているが、Oseen 近似では対流項を線形化した形で考慮している。しかし、この場合にも $Re \leq 1$ 程度である。

さらにレイノルズ数を高めた場合、つまり、 $0 \leq Re \leq 2 \times 10^5$ では、

$$C_D \approx \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0.4 \quad (3.129)$$

の近似式がある。

3.7.4 各種物体の抵抗係数

物体は、その物体断面形状によりそれぞれ異なった抵抗係数を持つ。物体の抵抗は、速度が遅い場合には速度の1乗に比例し（例えば、式(3.122)）、速度が大きくなると速度の2乗に比例する。

抵抗には主に摩擦抵抗と圧力抵抗があるが、一般的にはレイノルズ数の大きさにより以下の性質がある。

$$\begin{aligned} Re \leq 1 & \quad C_{Df} \gg C_{Dp} \\ Re \gg 1 & \quad C_{Df} \ll C_{Dp} \end{aligned} \quad (3.130)$$

ここで、 C_{Df} は摩擦抵抗係数、 C_{Dp} は圧力抵抗係数である。

ちなみに、良く使われる抵抗の名前を以下に記す。

- 誘導抵抗 (induced drag) : 有限翼の曳航渦 (trailing vortex) の影響で生じる揚力に関する抵抗。曳航渦は翼のスパン方向循環分布 (揚力分布に対応) から発生する。
- 有害抵抗 (parasite drag) : 全抵抗から誘導抵抗を引いたもの
- 摩擦抵抗 (skin friction drag) : 物体表面の流体による濡れ面 (wetted surface) に作用する粘性せん断力による抵抗。乱流になると大きくなる。流線形物体では剥離が少なく、摩擦抵抗が主たる抵抗となる。
- 圧力抵抗 (pressure drag) : 物体表面に垂直に作用する圧力による抵抗。剥離があると大きくなる。自動車の空力抵抗の約9割は圧力抵抗だと言われる。
- 干渉抵抗 (interference drag) : 2つの物体を近づけた時生じる付加的な抵抗 (例えば翼胴結合部分)。それぞれの抵抗の和より大きくなる
- トリム抵抗 (trim drag) : 航空機のトリムを取るために発生する、水平尾翼に作用する誘導抵抗や形状抵抗
- 形状抵抗 (profile drag) : 2次元翼で粘性抵抗と圧力抵抗を加えたもの
- 冷却抵抗 (cooling drag) : 冷却のためにエンジンを通して流れる空気の運動量損失による抵抗
- ベース抵抗 (base drag) : 物体の下流端での圧力減少による抵抗
- 波動抵抗 (wave drag) : 衝撃波発生による抵抗

ここで注意すべきことは、CFDなどで圧力分布を求め、これから抵抗を計算した場合、この値には誘導抵抗も含まれていることである。

2次元物体の場合

主な物体形状の抵抗係数を第3.28図に示す。これらはレイノルズ数が $Re \geq 10^4$ で成り立つ。いくつかの値を拾い上げてみると、平板 (流れに垂直の場合、 $C_D = 2.0$)、角柱 (正方形断面で流れが面に直角に当たる場合) (2.1)、角柱 (正方形断面で流れが角に当たる場合) (1.6)、半円管 (凸の場合) (1.2)、半円管 (凹の場合) (2.3)、半円柱 (凸の場合) (1.2)、半円柱 (平板側の場合) (1.7)、三角柱 (凸の場合) (1.6)、三角柱 (平板側の場合) (2.0) となる。ちなみに、平板が流れに平行に置かれているときには、層流の場合、レイノルズ数が $Re = 5 \times 10^4$ で、 $C_D = 6 \times 10^{-3}$ であり、乱流では、レイノルズ数が $Re = 10^6$ で $C_D \sim 4.4 \times 10^{-3}$ となる。

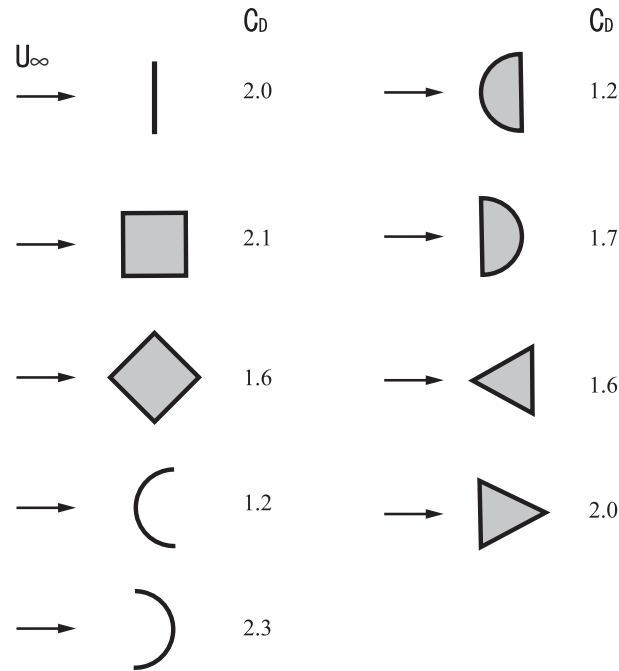


図 3.28: 2次元物体抵抗係数

3次元物体の場合

主だった3次元形状の抵抗係数を第3.29図に示す(抵抗係数は前面面積を基準としている)。これらはレイノルズ数が $Re \geq 10^4$ で成り立つ。いくつかの値を拾い上げてみると、立方体 ($C_D = 1.07$)、円錐(頂角 60°) (0.5)、円盤 (1.17)、カップ(凹の場合) (1.4)。ちなみに凹状態のカップと似た形状であるパラシュートの場合は $C_D = 1.2$ である。カップ(凸の場合) (0.4)、円柱で円柱の端面が主流に垂直の場合、細長比 $l/d = 0.5$ で $C_D = 1.15$ 、1.0 で 0.90、2 で 0.85、4 で 0.87 である。以上のように、2次元物体と比較して、3次元物体の方が抵抗係数は小さくなる。その理由は、3次元物体は流れが周方向に逃げるため、その分、緩和される。

3.7.5 流線型

物体を流線型 (streamlined form) にすると抵抗はかなり減少する。角型の2次元物体の場合、前面が平面の場合には $C_D = 2.0$ であるが、前面を丸くすると $C_D = 1.1$ に減少し、さらに後半部を追加する $C_D = 0.15$ にまで減少する。

また、2次元円柱の場合、層流では $C_D = 1.2$ であるが、この円形断面を長軸と短軸の比が 2:1 の楕円形にすると $C_D = 0.6$ に、4:1 にすると $C_D = 0.35$ に、さらに、8:1 にすると $C_D = 0.25$ にまで減少する。一方、流れが乱流の場合には、断面が円では $C_D = 0.3$ であるが、この断面を 2:1 の楕円形にすると $C_D = 0.2$ に、4:1 にすると $C_D = 0.15$ に、さらに、8:1 にすると $C_D = 0.1$ にまで減少する。このように、流れに垂直方向に比べて、流れ方向に物体の長さを伸ばすと抵抗係数は減少する。この意味において、太いワイヤーなどが流れの中にある場合には、その周りに流線型のカバーをすることで、かなり抵抗を減少できる。最近では、スポーツの世界でもこの概念が適用され、自転車競技の選手が流線型のヘルメットを被ったりしている。

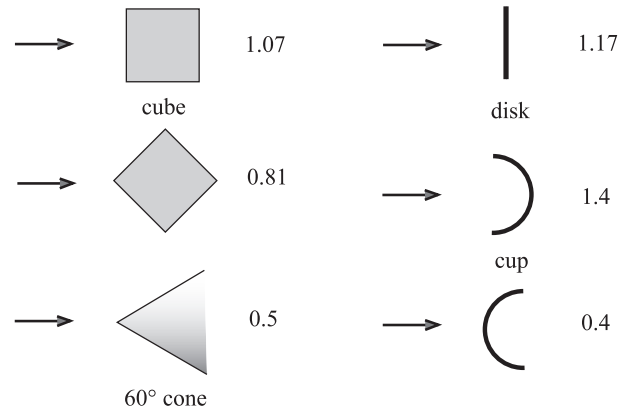


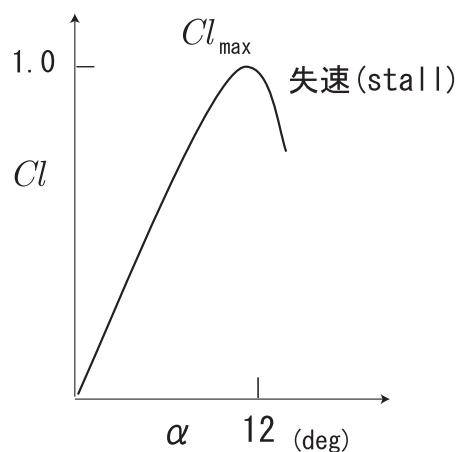
図 3.29: 3次元物体抵抗係数

3.7.6 翼型

飛行機を効率良く飛ばすには大きな揚力 L を発生させ、できるだけ抵抗 D を減少させる必要がある。つまり揚抗比 L/D を大きくすることが望ましい。また抵抗を小さくできれば、小さなエンジンですむ。搭載する燃料も少なくてすみ、その結果、機体の重量も小さくでき、良い方向に事が回る（正のスパイラル）。

抵抗あるいは抗力は、大きく分けて、2種類ある。

- 1 誘導抵抗 (induced drag): 揚力を作り出す結果生じる抵抗。揚力を作り出すためには避けられない。
- 2 有害抵抗 (parasite drag): 誘導抗力以外の抵抗をすべて含む。この有害抵抗の中に、形状抗力 (profile drag) があり、物体形状だけで決まる抗力で、摩擦抵抗 (frictional drag) と圧力抵抗 (pressure drag) からなる。そのほか、圧縮性流れで (高速流で) 重要となる波動抵抗がある。

図 3.30: 揚力係数と迎角との関係 (NACA0012 : $Re = 6 \times 10^6$)

飛行機で先ず重要なのが、翼断面形状を表す翼型 (wing section; airfoil) である。例えば、12% の厚みを持つ NACA0012 翼 (最大厚み位置は前縁から 30% コード長) の揚力係数は、レイノルズ数

$Re = 6 \times 10^6$ 、迎角 $\alpha = 12^\circ$ で、約 $C_L = 1.0$ である。また、抵抗係数 C_D は、 $C_L = 0$ のとき、 $C_D = 0.01$ 、 $C_L = 0.8$ のとき (このとき迎角は約 8°)、 $C_D = 0.018$ である。ちなみに、縦軸が C_L 、横軸が C_D のグラフをポーラカーブ (揚抗極線; あるいは $C_L - C_D$ 曲線) と呼ぶ。ただし、これらの数値は翼表面の粗さが標準的な場合であり、もし粗さがさらに減少できれば、 C_D をさらに小さくできる。

飛行機で必要なのは揚力と抗力の比である揚抗比 (L/D) である。通常の飛行機では L/D は $7 \sim 25$ である。

- コンコルド: $L/D = 7.5$
- B747: $L/D = 17$
- B52: $L/D = 22$
- グライダー: $L/D = 30 \sim 50$

揚抗比が大きいほど、飛行機は遠くまで飛んで行ける。つまり、航続距離 (range あるいは down range) を延ばすことができる。例えば、航続距離 R は、ブレゲーの航続距離方程式 (Breguet range equation) として、以下の式で表される。

$$R = \frac{V}{C} \frac{L}{D} \ln \frac{W_0}{W_1} \quad (3.131)$$

ここで、 V は飛行速度、 W_0 は燃料満載時での重量 (離陸前の重量) で、 W_1 は燃料消費後の重量である ($W_1 = W_0 - W_f$)。また、燃料消費率は、推力 T に比例するとして、係数 C を用いて、

$$\frac{dW}{dt} = -CT \quad (3.132)$$

と表わす。

プロペラ機の場合には、航続距離 R は、

$$R = \frac{550\eta}{C} \frac{C_l}{C_D} \ln \frac{W_0}{W_1} \quad (3.133)$$

となる。ここで、 η はプロペラ効率、 W_0 は全重量、 W_1 は全重量から燃料重量 W_f を引いたものである ($W_1 = W_0 - W_f$)。

この意味では、スペースシャトルのような宇宙機でも L/D は重要である。スペースシャトルのような有翼飛行体では、本来、 L/D は小さいが、これを少しでも大きくすることにより、クロスレンジ (cross range) を大きくできる。つまり、天候の関係で、ある着陸場にスペースシャトルを降ろせなくなったときに、軌道を変えて、別の着陸場まで行ける可能性を増大させる (フロリダのケネディ宇宙センターからカリフォルニアのエドワーズ空軍基地へ変更など)。スペースシャトルの L/D は、極超音速時には $L/D = 1$ 、着陸へのアプローチのときには、 $L/D = 4.5$ である。

大きな揚抗比 (Lift drag ratio) が必要なグライダーで良く使われ、レイノルズ数が $10^6 \sim 10^7$ できるだけ層流を保つ翼型である FX シリーズの FX63-167 翼型は、 $Re = 10^6$ のとき、迎角 $\alpha = 10^\circ$ で、 $C_L = 1.6566$ 、 $C_D = 0.0238$ 、 $C_M = -0.1449$ (頭下げモーメント) である。ちなみに、レイノルズ数が増えると C_L は増加し、 C_D は減少する。その他、グライダーでは、ゲッチングン翼型が使用される。

飛行機の世界では C_D の数値の桁の 10^{-4} の位を単位として 1 カウントと呼んでいる。つまり、それくらい小さいところまで抵抗の変化を気にしている。1 カウントでも抵抗を減らせば、成田・ニューヨークなど長距離を飛ぶ場合に、使用する燃料が減少する。その分、乗客を余計に乗せること

ができる。これは、ユーザーであるエアラインにとって大事な問題で、エアラインが抵抗係数を気にする理由である。

ちなみに、翼型は迎角を大きくしていくと、ある迎角で揚力を失う、つまり失速 (stall) する。翼型には 3 種類の失速の仕方がある。

- 後縁失速 (後縁からはく離する): NACA63₃ - 018 (厚み比 18%)
- 前縁失速 (前縁からはく離する): NACA63₁ - 012 (厚み比 12%)
- 薄翼失速 (全体的にはく離する): NACA64 - 006 (厚み比 6%)

(注意) 翼の前縁を丸くする理由は、迎角をつけたときに流れが剥がれないようにするためである。また、翼の後縁を尖らせる理由は、流れをそこから下流 (後流) に流すためである。

3.7.7 航空機の抵抗

- 大型民間航空機などの亜音速機の抵抗の内訳は、摩擦抵抗 (viscous drag) が約 50% で、誘導抵抗 (induced drag) が約 40% である (誘導抵抗 42%、圧力抵抗 8% とも言われる)。
- 摩擦抵抗のうち、半分は翼で発生し、残り半分は、胴体や尾翼である。
- ウィングレット (winglet) は誘導抗力の数パーセントを減らすだけで、大幅に減少させるものではない。それでも、長距離飛行するときには意味がある。
- また、超音速旅客機の一例では、摩擦抵抗が 40%、誘導抵抗が 37%、造波抵抗 (wave drag) が 18% である。
- さらに、第 2 次世界大戦中の戦闘機は主翼の抵抗が約 5 割、胴体は 3 割強、尾翼は 2 割弱である。

摩擦抵抗を減少させる一つの方法は、翼や胴体に生じる乱流境界層 (turbulent boundary layer) を層流境界層 (laminar boundary layer) に変えることである。。

ちなみに、

- B747 のレイノルズ数は、マッハ数 0.8 で、約 6×10^7 である。また、抵抗係数は $C_D = 0.031$ である。
- 一方、最近開発され燃費が良いとされる B787 は、抵抗係数が $C_D = 0.024$ である。

また、最高速度を決定する重要な因子である零揚力抵抗係数 C_{D0} (zero-lift drag coefficient) に関しては、第一次世界大戦中の複葉機 (biplane) では、 $C_{D0} = 0.0378$ であるが、戦後の大型爆撃機である B52 の零揚力抵抗係数は、 $C_{D0} = 0.012$ である。

(参考) 航空機の最高速度は以下の式で表わされる。

$$V_{max} \sim \sqrt[3]{\frac{P}{C_{D0} \times S}} \quad (3.134)$$

ここで、 P は power であり、 S は主翼面積である。

3.7.8 宇宙機の抵抗

地球など大気のある惑星では、地上から大気中をどのように飛ばして宇宙機を上空に持っていかると同時に、宇宙から宇宙機をどのように降ろして地上まで持ってくるかが重要な課題となる。そこにおいて重要となるパラメータは、弾道係数 (ballistic coefficient) である。その定義は、

$$C_{BC} = \frac{M}{SC_D} \quad (3.135)$$

である。ここで、 M は宇宙機の質量、 S は基準面積、 C_D は抵抗係数である。この弾道係数が高い場合は、細長物体で、逆に、弾道係数が小さい場合は、太った物体 (bluff body) である。弾道係数が小さいほど、減速が可能である。ちなみに、スポーツ用の銃の弾 (bullet) の場合、通常は、 $C_{BC} = 0.12 \sim 1.0$ 程度である。

第4章 熱を含む流れ

4.1 各エネルギー

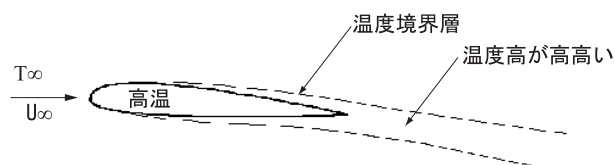


図 4.1: 温度境界層と高温流体の輸送

流体の流れにおける温度分布を求めるためには、エネルギーの釣り合いを考慮する必要がある。非圧縮性流体で考慮するエネルギーは、

- 内部エネルギー (internal energy): e_i
- 熱伝導 (conduction of heat): 熱伝導係数 (κ)
- 熱対流 (convection of heat): $u\partial T/\partial x + v\partial T/\partial y$
- 摩擦による熱生成 (heat through friction): $\tau_{ij} \times \partial u_i/\partial x_j$

が考えられる。圧縮性流体では、この他に、膨張あるいは圧縮による仕事が入ってくる。それは、非圧縮性流体と異なって、圧縮性流体では体積が変化するからである。

温度が上昇すると輻射 (radiation) も入ってくるが、普通の温度では寄与が小さいので無視する (通常 800°C 以上)。惑星の大気に高速で突入する場合のような極超音速流 (hypersonic flow) では、放射を考慮する必要がある。

その他の熱輸送 (heat transfer) の手段として、凝縮 (condensation) や蒸発 (evaporation) がある。

(参考) 内部エネルギーは、1個の分子に対して、1自由度当り、 $(1/2)kT$ である (k はボルツマン定数)。並進運動の場合、自由度が3であるので、 $(3/2)kT$ となる。単位質量当りでは、1自由度当り、 $(1/2)RT$ となる (ここで、 R 単位質量当りのガス定数である)。従って、並進運動の3自由度の場合、 $e_i = (3/2)RT$ となる。これは、単原子分子の場合に相当する。

(了)

4.2 エネルギー方程式

ここでは流体のエネルギー方程式を誘導する。 Δt の微小時間の中に、熱 (heat) ΔQ が微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ に加わると、熱力学第一法則 (the First Law of Thermodynamics) より、

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W \quad \text{あるいは} \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (4.1)$$

となる。ここで、右辺第1項 (E に関する項) は熱力学の関係式からすると内部エネルギーの増加である。しかし、流体が静止しているのではなく、運動している場合には運動エネルギーも加えて全エネルギー (total energy = internal energy + kinetic energy) を考える。また、右辺第2項は、流体要素が外部に対する仕事を表す。

フーリエ (Fourier) の法則に従えば、流体要素に加わる熱量は

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (4.2)$$

となる。この各量は、

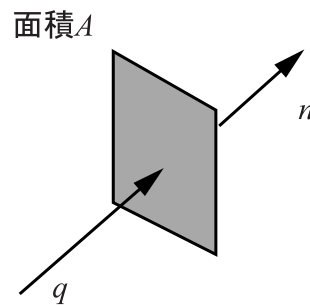


図 4.2: 熱流束

A : 面積 (area)

k : 熱伝導係数 (thermal conductivity)、空気の場合には、 15°C で $k = 0.0242 \text{ J/m} \cdot \text{sec} \cdot \text{deg}$ である。

n : 面に垂直な方向

Q : 熱量

q : 熱流束 (heat flux、単位時間・単位面積当たりの熱量)

である。

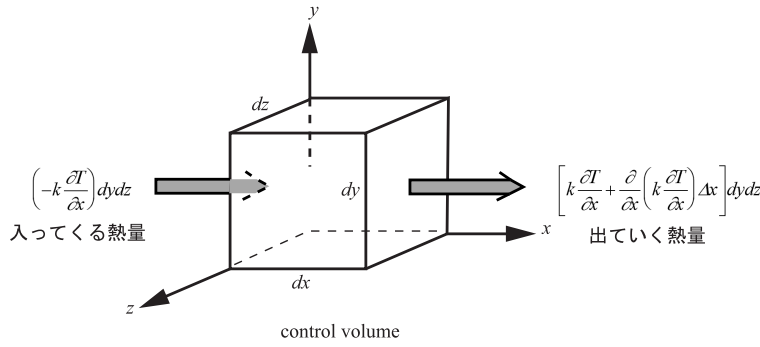


図 4.3: 検査体積を出入りする熱量

以上のことから、微小要素の面を通っての、 x 方向の熱の出入りによる差し引きは、

$$\left(-k \frac{\partial T}{\partial x}\right) \Delta y \Delta z + \left[k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) \Delta x\right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.3)$$

となる。

同様にして、 y 方向及び z 方向の各面での熱の出入りを考慮すると、 Δt 秒間の出入りは、

$$\Delta Q = \Delta t \underbrace{\Delta V}_{\Delta x \Delta y \Delta z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) \right] \quad (4.4)$$

となる。

内部エネルギーの変化 (dE_i) は、流体要素が運動をしている場合には、運動エネルギーも加えて、全エネルギー (dE_t) の変化を考える。

$$\frac{dE_t}{dt} = \rho \Delta V \left\{ \frac{de_i}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2) \right\} \quad (4.5)$$

一方、流体要素がその周りに対してなす仕事は、例えば、垂直応力の場合、

$$\begin{aligned} dW_{\sigma_x} &= -dydz\Delta t \left\{ -u\sigma_{xx} + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x\right) \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x\right) \right\} \\ &= -\Delta V \Delta t \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_{xx}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。ここで、右辺の最初にあるマイナスの符号の意味は以下のとおりである。第 4.4 図に書かれている力を使用すると、検査要素に外部から作用する力がなす仕事になるので、要素自身がなす仕事にするためには、負の符号を付ける必要がある。

以上より、この流体要素に対して、垂直応力とせん断応力によってなされる仕事は、まとめると

$$dW = -\Delta V \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (u\sigma_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\sigma_{yy} + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_{zz}) \right\} \quad (4.7)$$

となる。ここで、垂直応力 (normal stress) σ は、圧力 p と速度 (u, v, w) を使って

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} + 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.10)$$

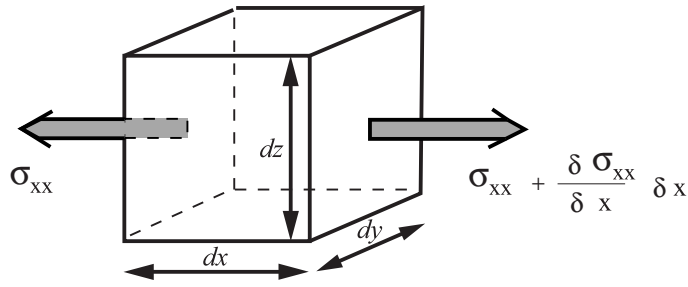


図 4.4: 検査体積表面に作用する力

と表され、せん断応力 (shearing stress) は、速度を使って

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.11)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4.12)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.13)$$

と表される。ちなみに、応力テンソルは、対称テンソルである。

以上より、式 (4.4) (4.5) (4.7) を式 (4.1) に代入すると、

$$\rho \frac{De_i}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (4.14)$$

が得られる。ここで、流れをオイラー表示で見ているので、微分が実質微分 D/Dt に置き換わっている。また、 Φ は散逸関数 (dissipation function) で、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mu \Phi &= \tau_{ij} \times \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_{ij}} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial w}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{zx} + \frac{\partial v}{\partial z} \tau_{zy} + \frac{\partial w}{\partial z} \tau_{zz} \\ &= 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ &\quad + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

この関数 Φ の次元は速度の2乗を長さの2乗で割ったものになっている (u^2/l^2)。ここで、 τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} は、 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} の粘性項 (圧力項を取り除いたもの) の部分である。ちなみに、ここでは、粘性係数 μ は一定値としている。

(参考) エントロピーの式

式 (4.14) を変形すると、エントロピー S に関する式が得られる。すでに誘導済みの、式 (1.102) から式 (1.107) への変形を参考にすると、エントロピーの式は、

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (4.16)$$

となる。

4.3 熱力学特性量

熱の問題あるいは温度の問題を考えるときには熱力学の特性量 (Thermodynamic Properties) が必要となる。内部エネルギー e_i およびエンタルピー h は

$$de_i = C_v dT \quad (4.17)$$

$$dh = C_p dT = C_v dT + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = C_v dT + d(pv) \quad (4.18)$$

$$h = e_i + \frac{p}{\rho} = e_i + pv \quad (4.19)$$

である。ここで、 v は比容積 (specific volume) と呼ばれ、単位質量当りの体積を表す。

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (4.20)$$

熱量的完全ガス (calorically perfect gas) においては、

$$C_v = \text{const}, \quad C_p = \text{const} \quad (4.21)$$

である。ここで、

$$C_p : \text{定圧比熱 (Specific heat at constant pressure)} \quad (4.22)$$

$$C_v : \text{定容比熱 (Specific heat at constant volume)} \quad (4.23)$$

である。ちなみに、空気の等圧比熱は、 $C_p \simeq 1.0 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ で、等積比熱は、 $C_v \simeq 0.72 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ である。また、これらの間には、 $R = C_p - C_v$ あるいは $\gamma = C_p/C_v$ の関係が存在する。ここで、 R は単位質量当りの気体定数、 γ は比熱比である。

特に、非圧縮性流体では、膨張による仕事が存在しないため、等圧比熱と等容比熱が等しくなると仮定できる。

$$C_p = C_v = C \quad (4.24)$$

ここで注意することは、当然ガスそのものの特性値として C_p 、 C_v はそれぞれ違う値を持っていることである。ここでは、流体を低速で流したときに使う比熱のことを述べている。

これを使うと、非圧縮性流体での内部エネルギーの変化およびエンタルピーの変化は

$$de_i = C dT \quad (4.25)$$

$$dh = C dT + \frac{dp}{\rho} = C dT + v dp \quad (4.26)$$

となる。ただし、エンタルピー h は、

$$h \equiv e_i + \frac{p}{\rho} = e_i + pv \quad (4.27)$$

と定義される。

ちなみに、内部エネルギー e_i の代わりに、エンタルピー h を使うと、

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(h - \frac{p}{\rho} \right) = \rho \frac{Dh}{Dt} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (4.28)$$

となる。

従って、式(4.28)を使って、エネルギー式(4.14)の左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{De_i}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{v} &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + p \operatorname{div} \vec{v} \\
 &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) + p \operatorname{div} \vec{v} \\
 &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + p \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div} \vec{v} \right)}_{\text{連続の式より } 0} \\
 &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

となる。

これを使うと、式(4.14)は、

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi \tag{4.30}$$

となる。

特に、熱伝導係数 k が一定の場合は、 k が微分の外に出る。

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + k \nabla^2 T + \mu \Phi \tag{4.31}$$

(参考)

以下において誘導する途中の式を適用すると、非圧縮性流では、式(4.30)および式(4.31)に含まれる Dp/Dt の項は消えてなくなる。理由は、状態方程式 $p = \rho RT$ より、

$$\frac{Dp}{Dt} = RT \frac{D\rho}{Dt} + R\rho \frac{DT}{Dt} \tag{4.32}$$

式(4.35)、式(4.36)、式(4.39)より

$$\frac{Dp}{Dt} = RT \left(-\beta \frac{DT}{Dt} \right) + R\rho \frac{DT}{Dt} = 0 \tag{4.33}$$

(参考終わり)

一方、非圧縮性流体の場合は、連続の式が $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ であるとはいえ、これをエネルギー式には適用できない。そもそも $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ は低速流の近似である。エネルギー式では、この速度発散の項は、他の項と同じ程度の大きさとなる。つまり、温度が上昇すれば、流体エレメントの体積も上昇する。これを考慮する必要がある。

そこで、まず、圧縮性流の連続の方程式から、

$$-\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \tag{4.34}$$

が得られる。ここで、密度の実質微分を以下のように近似的に書き換える。

$$\frac{D\rho}{Dt} \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} \tag{4.35}$$

この式では、自然対流のところで述べるように、密度の圧力変化は相対的に小さいとして無視されている。ここで、密度の温度微分は、体積膨張率 β (the coefficient of volume expansion) として定義される。

$$\beta = -\frac{(\partial \rho / \partial T)_p}{\rho} \quad \text{あるいは} \quad \beta = \frac{(\partial v / \partial T)_p}{v} \tag{4.36}$$

ここで、 v は比容積 ($v = 1/\rho$) である。これを上式に代入すると

$$-\nabla \cdot \vec{v} = -\beta \frac{DT}{Dt} \quad (4.37)$$

となる。また、完全ガスの状態方程式は

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (4.38)$$

であるので、これを使って微分すると、体積膨張率 β は

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (4.39)$$

となる。これを上式に代入すると

$$-\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} \quad (4.40)$$

となる。この式の両辺に $-p$ を掛けて、さらに状態方程式を使えば、

$$p\nabla \cdot \vec{v} = \rho R \frac{DT}{Dt} \quad (4.41)$$

と変形される。熱量的完全ガスでは

$$C_p - C_v = R \quad (4.42)$$

であるので、上式は

$$p\nabla \cdot \vec{v} = \rho(C_p - C_v) \frac{DT}{Dt} \quad (4.43)$$

となる。

エネルギー式 (4.14) の左辺の第 2 項をこの関係式で置き換えると、定積比熱の項が左辺と右辺でキャンセルされて、

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\Phi \quad (4.44)$$

が得られる。ただし、熱伝導係数 k は一定の場合である。水の場合は $C_p \approx C_v$ であるが、空気の場合には、 $C_p \neq C_v$ であるので、注意を要する。

ここで、熱拡散率 (thermal diffusivity) a は

$$a \equiv \frac{k}{\rho C_p} \quad (4.45)$$

である。つまり、熱伝導係数と、流体の熱容量との比である。

粘性散逸項はマッハ数の二乗に比例して増大するので、非圧縮性流のような低速流では省略して考えて良い。その結果、エネルギー式は

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \quad (4.46)$$

$$\frac{DT}{Dt} = a\nabla^2 T \quad (4.47)$$

となる。

非圧縮性流体では、通常、速度と温度を分けて別々に解くことができる。つまり、速度は運動方程式を解いて求め、その速度を使って、温度は、エネルギー方程式 (4.47) を解いて求める。これは熱の問題では強制対流 (forced convection) と呼ばれる。

4.3.1 平板熱境界層（強制対流の場合）

境界層近似を施した、温度を求めるエネルギー方程式（定常の場合）は、

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.48)$$

である。右辺の粘性項中の x の2回微分は、 x 方向の変化が y 方向の変化に比べて小さいとして、省略されている。

等温壁の場合、境界条件は、

$$y = 0 \text{ で } T = T_w \quad (4.49)$$

$$y = \delta_T \text{ で } T = T_\infty \text{ あるいは } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (4.50)$$

である。ここで、 T_w は平板上の温度で、 δ_T は温度境界層の巾である。

ちなみに、速度 u を求める方程式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.51)$$

である。ここで、 ν は動粘性係数である。

温度 T を以下のように無次元化する。

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (4.52)$$

この換算を使えば、境界条件式（4.50）は、

$$y = 0 \text{ で } \theta = 0 \quad (4.53)$$

$$y = \delta_T \text{ で } \theta = 1 \quad (4.54)$$

となる。

Pohlhausen は、Blasius と同じ相似変数 η (3.43) と流れ関数 ψ (3.44) を用いて、この方程式の厳密解を求めた。

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, \quad \psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \quad (4.55)$$

その結果、式（4.48）は、以下の線形の常微分方程式となる。

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (4.56)$$

この方程式は、解析的に解くことができる。

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\beta f(\alpha) d\alpha\right) d\beta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\beta f(\alpha) d\alpha\right) d\beta} \quad (4.57)$$

問 この式を誘導せよ。

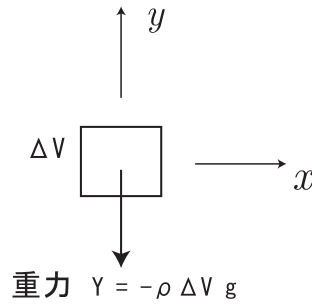


図 4.5: 自然対流における重力の作用

4.4 自然対流

上で述べた強制対流と対照的なものが自然対流 (natural convection) である。自然対流では重力が流れを作り出す原因となる。つまり、運動方程式に体積力を考慮する。このように自然対流は、周りに流れがほとんど存在しないようなときに、ゆっくりした流れとして出現する。ちなみに宇宙では (例えば宇宙ステーションでは) 重力が極めて小さく ($10^{-6} g$ 程度)、その結果自然対流が無いので、均質な材料を作ることができると考えられている。

定常流の場合、 x, y, z 方向の運動方程式はそれぞれ

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + X + \mu \nabla^2 u \quad (4.58)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + Y + \mu \nabla^2 v \quad (4.59)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + Z + \mu \nabla^2 w \quad (4.60)$$

となる。

ここで、 (X, Y, Z) は体積力 (body force) である。体積力とは、その大きさが体積に比例する力である。重力は体積力的一种である。単位体積の流体に働く重力 (X, Y, Z) は、

$$(X, Y, Z) = (\rho g_x, \rho g_y, \rho g_z) \quad (4.61)$$

$$\vec{g} = (g_x, g_y, g_z) \quad (4.62)$$

ここで、 \vec{g} は重力加速度ベクトルで、 (g_x, g_y, g_z) は (x, y, z) 方向の成分である。

これを式 (4.58) から式 (4.60) に代入すると、

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (4.63)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad (4.64)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad (4.65)$$

となる。

一般に、密度 ρ は、 p と T の関数である。ある一つの熱力学変数は、平衡状態であれば、他の2つの熱力学変数で表わされる。流体の諸量が、一様な状態である $\rho_\infty, p_\infty, T_\infty$ からさほどずれていな

い場合には、テーラー展開を利用して以下の近似が成立する。この近似をブシネ（あるいはブシネスク：Boussinesq）近似と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(p, T) \\ \rho &= \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\infty (T - T_\infty) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_\infty (p - p_\infty) \\ &= \rho_\infty - \rho_\infty \beta (T - T_\infty) + \underbrace{\frac{\gamma}{c_\infty^2} (p - p_\infty)}_{\text{この項は通常無視できる}}\end{aligned}\tag{4.66}$$

ここで使われている体積膨張率（coefficient of thermal expansion） β は、以下のように定義される。

$$\beta = -\frac{1}{\rho_\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\infty\tag{4.67}$$

完全ガスの場合、その状態方程式

$$p = \rho RT\tag{4.68}$$

を代入すると、体積膨張率 β は

$$\beta = \frac{1}{T}\tag{4.69}$$

となる。ちなみに、上式は気体の場合であるが、液体の場合の体積膨張率は、例えば水の場合には、 $\beta = 0.18 \times 10^{-3} (1/K)$ である。

一方、圧力による密度変化は、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{RT} = \frac{\gamma}{\gamma RT} = \frac{\gamma}{c^2}\tag{4.70}$$

となる。この結果、低速流ではこの変化は無視できる。

理由：この式を無次元化すると、

$$\left(\frac{\partial \rho/\rho_\infty}{\partial p/\rho_\infty U_\infty^2}\right) \times \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{\gamma}{c^2}\tag{4.71}$$

となり、これを变形すると、以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{p}}\right) = \frac{U_\infty^2}{c^2} \gamma = M_\infty^2 \gamma\tag{4.72}$$

従って、マッハ数 M_∞ が小さければ（例えば、 $M_\infty = 0.01$ ）、この項は無視できる。ちなみに、 \bar{p} 、 $\bar{\rho}$ はそれぞれ、無次元化された圧力と密度である。

同様に、密度の温度勾配は、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) = -\rho_\infty \beta = -\rho_\infty \frac{1}{T_\infty}\tag{4.73}$$

これを無次元化すると、

$$\left(\frac{\partial \rho/\rho_\infty}{\partial T/T_\infty}\right) \times \frac{\rho_\infty}{T_\infty} = -\frac{\rho_\infty}{T_\infty} \rightarrow \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{T}}\right) = -1\tag{4.74}$$

となる。

以上より、自然対流に対する支配方程式として、連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\tag{4.75}$$

x, y, z 方向の運動方程式はそれぞれ

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} - \rho_\infty g_x \beta \theta + \mu \nabla^2 u \quad (4.76)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y} - \rho_\infty g_y \beta \theta + \mu \nabla^2 v \quad (4.77)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z} - \rho_\infty g_z \beta \theta + \mu \nabla^2 w \quad (4.78)$$

ただし、 θ は、基準温度からの温度差である。

$$\theta = T - T_\infty \quad (4.79)$$

温度を求めるためのエネルギー方程式は

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi \quad (4.80)$$

となる。

式(4.76)～式(4.78)では、圧力 p^* は、通常の圧力 p のほかに重力による寄与が含まれている。例えば、 x 方向の方程式であれば、

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_\infty g_x = -\frac{\partial}{\partial x} (p - \rho_\infty g_x x) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} \quad (4.81)$$

となる。ここで、 p^* は、

$$p - \rho_\infty g_x x = p^* \quad (4.82)$$

と定義される。 y 方向も含めた 2 次元の場合には、

$$p^* = p - \rho_\infty (g_x x + g_y y) \quad (4.83)$$

となり、 z 方向も含めた 3 次元の場合には、

$$p^* = p - \rho_\infty (g_x x + g_y y + g_z z) \quad (4.84)$$

となる。

ここで、運動方程式を無次元化する。

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{x}} - \rho g \beta \Delta T \bar{g}_x \bar{\theta} + \frac{\mu U_\infty}{L^2} \nabla^2 \bar{u} \quad (4.85)$$

ここで、 $\bar{\theta}$ は以下のように定義される。

$$\bar{\theta} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \quad (4.86)$$

左辺の係数で全体を割ると

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{x}} - \frac{g \beta \Delta T L}{U_\infty^2} \bar{g}_x \bar{\theta} + \frac{\nu}{L U_\infty} \nabla^2 \bar{u} \quad (4.87)$$

ここで、右辺第 2 項の浮力の項の係数は以下のように書き換えられる。

$$\frac{g \beta \Delta T L}{U_\infty^2} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} \times \left(\frac{\nu}{U_\infty L} \right)^2 = Gr \times \frac{1}{Re^2} \quad (4.88)$$

ここで、新しいパラメータとして、グラスホフ数 Gr が定義された。

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (4.89)$$

Re は既に出てきたようにレイノルズ数である。

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (4.90)$$

従って、式(4.87)の右辺の最後の式の係数は、 $1/Re$ となる。以上をまとめると無次元化された運動方程式は

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{x}} - \frac{Gr}{Re^2} \bar{g}_x \bar{\theta} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} \quad (4.91)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{y}} - \frac{Gr}{Re^2} \bar{g}_y \bar{\theta} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{v} \quad (4.92)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial \bar{z}} - \frac{Gr}{Re^2} \bar{g}_z \bar{\theta} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{w} \quad (4.93)$$

となる。

次に、エネルギー式の無次元化を考える。通常、エネルギー式での粘性散逸項 $\mu\Phi$ は、マッハ数が小さい流れでは省略できる。これを調べるために、式(4.80)のエネルギー式を無次元化する。ここで、 $(\bar{\quad})$ の量は、無次元量を表す。

$$\frac{\rho_\infty C_p U_\infty T_\infty}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \dots \right) = k \frac{T_\infty}{L^2} \nabla^2 \bar{T} + \frac{U_\infty^2}{L^2} \mu \bar{\Phi} \quad (4.94)$$

式(4.94)を左辺の係数である $\frac{\rho_\infty C_p U_\infty T_\infty}{L}$ で割ると、

$$\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \dots \right) = \frac{k L T_\infty}{\rho_\infty C_p U_\infty T_\infty L^2} \nabla^2 \bar{T} + \frac{U_\infty \mu}{\rho_\infty C_p T_\infty L} \bar{\Phi} \quad (4.95)$$

となる。

ここで、 $\bar{\Phi}$ の係数を整理すると、

$$\frac{U_\infty \mu}{\rho_\infty C_p T_\infty L} = \frac{\mu}{\rho_\infty L U_\infty} \cdot \frac{U_\infty^2}{C_p T_\infty} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{(\gamma - 1) U_\infty^2}{\gamma R T_\infty} = (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{Re} \quad (4.96)$$

が得られる。低速流では $M_\infty \rightarrow 0$ と考えて良いので、この項は省略できる。

温度拡散項 $\nabla^2 \bar{T}$ の係数は、

$$\begin{aligned} \frac{k L T_\infty}{\rho_\infty C_p U_\infty T_\infty L^2} &= \frac{k}{\rho_\infty C_p U_\infty L} = \frac{k}{\mu C_p} \cdot \frac{\mu}{\rho_\infty U_\infty L} \\ &= \frac{1}{Pr} \cdot \frac{1}{Re} = \left(\frac{1}{Pe} \right) \end{aligned} \quad (4.97)$$

つまり、プラントル数とレイノルズ数との積の逆数である。ちなみに、プラントル数とレイノルズ数の積は、ペクレ数 Pe と定義される。

$$Pe = Pr \times Re \quad (4.98)$$

以上、自然対流の式の中に現れるパラメータは、

$Re = UL/\nu$	レイノルズ数 (Reynolds number)	慣性力と粘性力の大きさの割合
$Gr = g\beta\Delta TL^3/\nu^2$	グラスホフ数 (Grashof number)	浮力と粘性力の大きさ割合
$Pr = \mu C_p/k$	プラントル数 (Prandtl number)	粘性の拡散率と熱の拡散率の比
$Ra = Gr \cdot Pr$	ラーリー数 (Rayleigh number)	ラーリー数が大きいと不安定性が現れる
$Pe = Pr \cdot Re$	ペクレ数 (Peclet number)	対流および熱伝導によるエネルギー輸送の比

ちなみに、レーリー数とは、浮力による不安定化と粘性による安定化の比である。

鉛直に置かれた平板の場合、平板先端から上方への距離に基づいて、パラメータの値を見積もると、平板先端付近では層流であるが、それより上方では乱流に遷移する。

$$Ra = Gr \cdot Pr < 10^9 \quad (\text{層流}), \quad Ra = Gr \cdot Pr \geq 10^9 \quad (\text{乱流}) \quad (4.99)$$

このときの熱伝達 (heat transfer) を考える (熱伝達とは固体表面と固体表面上を流れる流体間の熱移動)。熱伝達率の無次元数であるヌッセルト数 Nu は、

$$Nu = 0.59Ra^{1/4} \quad 10^4 < Ra < 10^9 \quad (\text{層流}) \quad (4.100)$$

$$Nu = 0.13Ra^{1/3} \quad 10^9 < Ra < 10^{12} \quad (\text{乱流}) \quad (4.101)$$

となる。乱流の方が熱がより良く物体から奪われることが分かる。

(参考)

ヌッセルト数 (Nu) とは、熱伝達係数 α の無次元パラメータである。長さ x を基準としたヌッセルト数は、

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{k} \quad (4.102)$$

となる。ちなみに、熱伝達係数とは、単位温度当りどのくらいの熱が奪われる (あるいは入り込む) かを示すもので、

$$\alpha = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} \quad (4.103)$$

で定義される。ここで、 q_w は物体表面上での熱流束である。

壁からの熱量の出入りを表すパラメータには、この他、スタントン数 (St : Stanton number) がある。スタントン数の定義は、

$$St = \frac{\alpha}{\rho C_p U_\infty} \quad (4.104)$$

である。スタントン数とヌッセルト数の間には、

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} \quad (4.105)$$

の関係がある。(参考終わり)

以下に、流体の代表である、空気と水と潤滑油に対するプラントル数の値を示す。

	Pr	温度
空気	0.714	20 °C
水	7.03	20 °C
潤滑油	10100	20 °C

ガスの場合、プラントル数は温度にあまり依存しない。

プラントル数 Pr の違いは速度境界層と温度境界層の厚さの比に現れ、以下のような関係がある。

$$\begin{aligned} Pr > 1 &\rightarrow \text{速度境界層} > \text{温度境界層} \\ Pr \cong 1 &\rightarrow \text{速度境界層} \cong \text{温度境界層} \\ Pr < 1 &\rightarrow \text{速度境界層} < \text{温度境界層} \end{aligned}$$

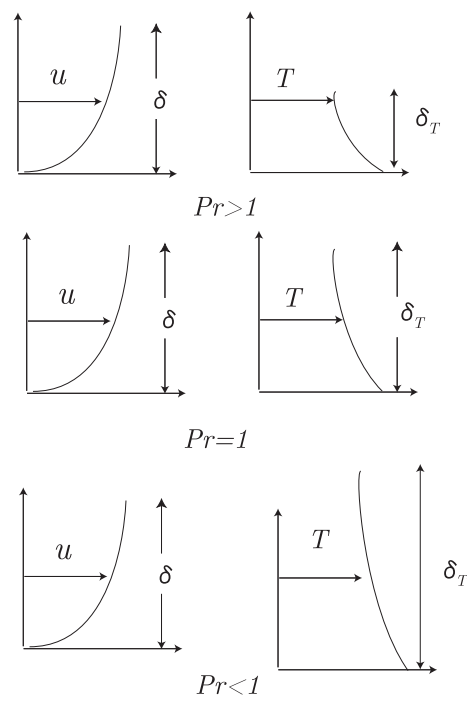


図 4.6: プラントル数による速度境界層と温度境界層の厚さの違い

第5章 乱流

今までは層流 (laminar flow) について述べてきたが、ここでは乱流 (turbulent flow) について勉強する。粘性流体力学で一番大事なパラメータは、レイノルズ数 $Re(= UL/\nu)$ である。レイノルズ数が大きくなると、流れは必然的に乱流 (turbulent flow) に移行する。したがって、流れの速度が速い場合、あるいは物体の大きさが大きい場合にはレイノルズ数が大きくなり、乱流となる。

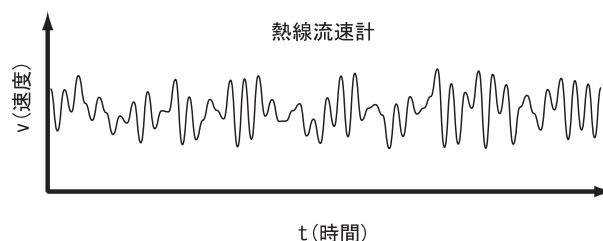


図 5.1: 乱流の場合の速度の時間変化

この流れの特徴は時間的に変動する、低周波変動から高周波変動まで幅広い範囲の変動を含んでいることである。この流れを解析するオーソドックスな方法は、流れの各量を平均量とそれからのずれ (変動量) に分ける方法である (レイノルズ分解)。例えば、 x 方向の速度成分 u は、

$$u = \bar{u} + u' \quad (5.1)$$

のようになる。ここで、 \bar{u} は平均速度で、 u' は変動速度である。同様にして、他の流れの物理量についても

$$\left. \begin{aligned} v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

と表す。

熱の問題を考えたり、圧縮性流体 (compressible flow) の場合には、更に、温度 T や密度 ρ を

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

のように分解する。

このとき、時間平均は、

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u \, dt \quad (5.4)$$

として定義される。ここで、 Δt は各量の平均を取る時間である。この時間長さ Δt は抽象的ではあるが、平均値が得られるのに十分な時間と考える。

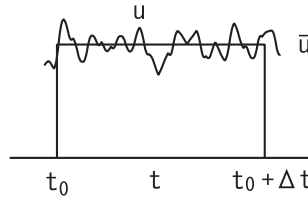


図 5.2: 平均の取り方

式 (5.1) に対して式 (5.4) で定義された平均操作を施すと,

$$\bar{u} = \bar{u} + \bar{u}' \quad (5.5)$$

となる。従って、

$$\bar{u}' = 0 \quad (5.6)$$

となる。同様にして

$$\bar{v}' = 0, \quad \bar{p}' = 0, \quad \bar{\rho}' = 0, \quad \bar{T}' = 0 \quad (5.7)$$

となる。当然の事ながら、変動量の平均は0である。

この方法で注意すべきことは、これらの変動量 ($u', v', w', p', \rho', T'$) が平均量の運動やエネルギーに影響を及ぼすことである。もっと具体的に述べると、運動に関しては、平均量の変化に対する抵抗として作用する。つまり、見かけの粘性力の増大になる。

式 (5.4) の時間平均に関する一般的ルールは以下のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \overline{f \cdot g} &\neq \bar{f} \cdot \bar{g} \\ \overline{\bar{f}} &= \bar{f} \\ \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{f \cdot g} &= \bar{f} \cdot \bar{g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \\ \overline{\partial f / \partial s} &= \partial \bar{f} / \partial s \\ \overline{\int f ds} &= \int \bar{f} ds \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

ここで、 s は空間座標などである。ここでは特に、式 (5.8) の第1番目の式が重要となる。

[参考]

流れの速度が速くなると起こる圧縮性乱流では、当然の事ながら密度そのものが変化する。これを加味して、圧縮性の乱流では、質量加重平均 (mass-weighted average あるいは density-weighted average) が採用される。ちなみに質量加重平均は、Favre (ファール) 平均とも呼ばれる。具体的には、

$$\tilde{A} = \frac{\rho A}{\bar{\rho}} \quad (5.9)$$

となる。ここで、 \tilde{A} は変数 A に対する質量加重平均である。この結果、変数 A は、

$$A = \tilde{A} + A'' \quad (5.10)$$

と表される。 A'' は質量加重平均値からのずれである変動量である。ちなみに、以下の式が上式から明らかとなる。

$$\overline{\rho A''} = 0 \quad (5.11)$$

5.1 乱流における見掛けの力

ここで、運動量理論に基づいて、乱流の見掛けの力について考える。流体中に架空の窓 (x 軸に垂

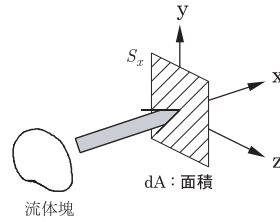


図 5.3: 流体中の窓を流体塊が通過

直な面 S_x) を考え、流体の塊 (あるいは要素) が窓の左側から右側に移動する (図 5.3 参照) 場合を考える。この流体塊の持つ x, y, z 方向の運動量は、単位時間当たり、

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向運動量} &: dM_x = \rho u \cdot u \cdot dA \\ y \text{ 方向運動量} &: dM_y = \rho u \cdot v \cdot dA \\ z \text{ 方向運動量} &: dM_z = \rho u \cdot w \cdot dA \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

である。これらの時間平均をとり、かつ、各変数に平均量 + 変動量の関係を入れ、式 (5.8) の関係を適用する。その結果、 x 方向では、

$$\left. \begin{aligned} \overline{dM_x} &= dA \cdot \overline{\rho u^2} \\ &= dA \cdot \rho \cdot (\overline{u} + u')^2 \\ &= dA \cdot \rho \cdot (\overline{u}^2 + u'^2) \end{aligned} \right) \quad (5.13)$$

となる。ここで、第 2 行目の式は、非圧縮性流では密度が変化しない、つまり、密度が一定よりパーの外 (平均操作の外) に密度を出すことができる。また、第 3 行目では $\overline{2uu'} = 0$ の関係が使われている。つまり、

$$2\overline{uu'} = 2\overline{u} \cdot \overline{u'} = 0 \quad (5.14)$$

同様にして、 y 方向および z 方向の運動量は

$$\overline{dM_y} = dA \cdot \rho (\overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u'v'}) \quad (5.15)$$

$$\overline{dM_z} = dA \cdot \rho (\overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{u'w'}) \quad (5.16)$$

となる。

5.1.1 作用・反作用の関係

ここで、運動の法則である作用・反作用 (law of action and reaction) の関係を適用する。これは、ニュートンの運動に関する第三法則であり、運動量 (momentum) の増加分だけ (窓の左側から右側に投げ出した分だけ)、その部分を押ししたことになり、その結果、面積 dA は右側の流体から押し返される。従って、 dA に外から掛かる力は、単位面積当たり、

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向} \quad \sigma_{xx} &= -\rho (\overline{u} \cdot \overline{u} + \overline{u'u'}) \\ y \text{ 方向} \quad \tau_{xy} &= -\rho (\overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u'v'}) \\ z \text{ 方向} \quad \tau_{xz} &= -\rho (\overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{u'w'}) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

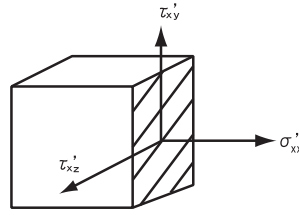


図 5.4: セル表面に作用する応力

となる。以上のことから、乱れによって生じる力の増加分は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{xx} &= -\overline{\rho u' u'} \\ \tau'_{xy} &= -\overline{\rho u' v'} \\ \tau'_{xz} &= -\overline{\rho u' w'} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

となる。

これらは、見かけ上の力 (apparent stress), あるいは、レイノルズ応力 (Reynolds stress) と呼ばれ、Osborne Reynolds によって 1885 年 (1895 年?) に導かれた。他の 2 方向の面 (窓) S_y, S_z でも、同様に考えることができる。

5.1.2 相関の符号

$\overline{u'v'}$ は、変動 u' と v' の 2 次相関 (correlation) であると見なすことができる。ここでは、この相関 $\overline{u'v'}$ の符号に関心があり、その符号が負であることを示す。別の言い方をすれば、相関の前に - 符号を付けて、 $-\overline{u'v'} > 0$ であることを示す。

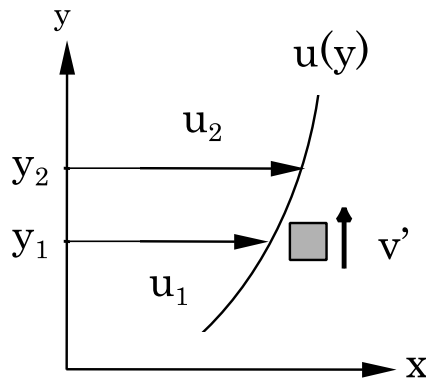


図 5.5: 流体塊が下から上に移動する場合

平均流れは y 方向に速度が増加する、つまり、 $d\bar{u}/dy > 0$ として、以下の 2 つの場合に分けて考える。

1) $v' > 0$ の場合：つまり、 x 方向の速度 u_1 を持った流体の塊あるいは乱流の塊 (eddy) が下から上へ移動する場合 (図 5.5 参照)、 $u_1 < u_2$ より、運ばれた先 ($y = y_2$) での x 方向速度は、 u_2 か

ら u_1 に置き換えられ、その結果、減少することになる。 $u_1 - u_2 < 0$ より、 $u' < 0$ となる。つまり、 u' と v' の相関は、

$$u'v' < 0 \quad (5.19)$$

である。

この現象を平均的に考えても、つまり、時間平均あるいはアンサンブル平均 (ensemble average: 何回か同じ条件で実験を行ってその平均を取ること) として考えると、やはり、

$$\overline{u'v'} < 0 \quad \text{or} \quad -\overline{u'v'} > 0 \quad (5.20)$$

となる。

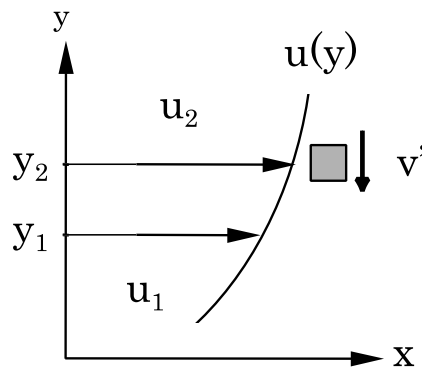


図 5.6: 流体の塊が上から下に移動する場合

2) $v' < 0$ の場合: つまり、 x 方向の速度 u_2 を持った上にある流体の塊 (eddy) が下に落ちて来る場合 (図 5.6 参照)、運ばれた先 ($y = y_1$) での速度は、 $u_2 - u_1 > 0$ だけ増加する。その結果、

$$u' > 0$$

となる。従って、相関は

$$u'v' < 0 \quad (5.21)$$

平均的に考えても、

$$\overline{u'v'} < 0 \quad \text{or} \quad -\overline{u'v'} > 0 \quad (5.22)$$

となる。

以上のように、2つに分けたどちらの場合でも、両方とも同じ結果が得られた。これに密度 ρ を掛けると応力になるので、応力で考えると

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'} > 0 \quad (5.23)$$

となる。この応力は、層流における分子粘性による応力

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \quad (5.24)$$

と符号が一致する。つまり、乱流の見掛けの力は層流の応力と同じ方向に働く力である。その結果、乱流になると、流体のせん断力が増加することになる。

5.2 乱流に対する支配方程式（非圧縮性の場合）

ここでは、乱流に対する支配方程式を誘導する。

まず、層流に対する支配方程式として、

1) 連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.25)$$

2) 運動量方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uu + \frac{\partial}{\partial y} uv + \frac{\partial}{\partial z} uw \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (\text{x 方向}) \quad (5.26)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} vu + \frac{\partial}{\partial y} vv + \frac{\partial}{\partial z} vw \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \quad (\text{y 方向}) \quad (5.27)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} wu + \frac{\partial}{\partial y} wv + \frac{\partial}{\partial z} ww \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \quad (\text{z 方向}) \quad (5.28)$$

となる。

連続の方程式 (5.25) に式 (5.2) の平均値 + 変動量の関係を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} + w') = 0 \quad (5.29)$$

となる。この式の平均をとり、式 (5.8) の関係を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{w} = 0 \quad (5.30)$$

が得られる。ただし、ここでは、式 (5.8) より、以下の関係、

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x} u'} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}' = 0 \quad (5.31)$$

が使われている。

式 (5.30) は、平均流に対する速度の発散 (divergence) が 0 であることを示している。これが平均流に対する連続の方程式である。

また、式 (5.29) から式 (5.30) を引くと、

$$\frac{\partial}{\partial x} u' + \frac{\partial}{\partial y} v' + \frac{\partial}{\partial z} w' = 0 \quad (5.32)$$

の式が得られる。これは、変動量に対しても、その速度発散が 0 であることを示している。

式 (5.26) から式 (5.28) の運動方程式の各量に平均量 + 変動量の関係を代入し、それに対して平均をとると、平均量に対する、x, y, z 各方向の運動方程式が以下のように得られる。

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \left[\frac{\partial \overline{-\rho u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{-\rho u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{-\rho u' w'}}{\partial z} \right] \quad (5.33)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} + \left[\frac{\partial \overline{-\rho u' v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{-\rho v' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{-\rho v' w'}}{\partial z} \right] \quad (5.34)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} + \left[\frac{\partial \overline{-\rho u' w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{-\rho v' w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{-\rho w' w'}}{\partial z} \right] \quad (5.35)$$

これらの方程式は次のようにも書ける。

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zx} \right) \quad (5.36)$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zy} \right) \quad (5.37)$$

$$\rho \frac{D\bar{w}}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zz} \right) \quad (5.38)$$

これらをベクトル形式で簡単に表すと

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = -\text{grad } \bar{p} + \mu \nabla^2 \vec{v} + \nabla \cdot \mathbf{T}_R \quad (5.39)$$

となる。ここで、 $\vec{v} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})^t$ である。上付き添え字 t は転置を表す。

レイノルズ応力 \mathbf{T}_R のテンソル表示は、

$$\mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \tau'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u' u'} & -\overline{\rho u' v'} & -\overline{\rho u' w'} \\ -\overline{\rho v' u'} & -\overline{\rho v' v'} & -\overline{\rho v' w'} \\ -\overline{\rho w' u'} & -\overline{\rho w' v'} & -\overline{\rho w' w'} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

となる。これは対称テンソルである。ちなみに、テンソルという言葉は、弾性体の研究の中で初めて使われた。

以上より、非圧縮性流の乱流に作用する全応力は、

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\rho u' u'} \quad (5.41)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \overline{\rho u' v'} \quad (5.42)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \overline{\rho u' w'} \quad (5.43)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{\rho v' v'} \quad (5.44)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \overline{\rho v' w'} \quad (5.45)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \overline{\rho w' w'} \quad (5.46)$$

となる。ちなみに、応力は対称テンソルであるので、 $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx}$ 、 $\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{zx}$ 、 $\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy}$ である。

一般に、レイノルズ応力は、分子粘性より大きい。言い換えれば、乱流粘性 (eddy viscosity) は分子粘性 (molecular viscosity) より大きい。また、レイノルズ応力が存在するということは、 u' と v' の間に相関があることを意味する。

参考

圧縮性乱流では、質量加重平均が用いられ、その結果得られる流れの方程式は以下のようにコンパクトな形で記述される。

- 連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{v}) = 0 \quad (5.47)$$

- 運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \vec{v} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{v} \otimes \vec{v} + \bar{p} \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}'') = 0 \quad (5.48)$$

ここで、 \mathbf{T} は応力テンソルで、変動の応力テンソルは、

$$\mathbf{T}'' = -\overline{\rho v'' \otimes v''} \quad (5.49)$$

となる。

以上の式で、 \vec{v} 、 v'' はベクトルで、掛け算の記号 \otimes はテンソル積であることに注意。

5.3 境界層近似による乱流の方程式

今まで誘導してきた乱流の運動方程式は、境界層近似を施すことにより簡単化される。式(5.30)および(5.33)より、平均流が時間とともに変化しない場合、連続の式および x 方向の運動方程式(平均流が定常の場合)は以下ようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.50)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right\} \quad (5.51)$$

右辺の分子粘性の項と乱流による見かけの応力項は、境界層の場合、 y 方向の変化が大きくなり、 y 方向の微分を含む項のみを残している。この式を見て、層流境界層に対する式(??)および(3.22)との違いは、先ず、各量が平均量になっていることである。

$$u, v, p \rightarrow \bar{u}, \bar{v}, \bar{p} \quad (5.52)$$

もう一つの違いは、粘性応力の項である。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \quad (5.53)$$

となっている。応力が層流の応力 τ_l と乱流による見かけの応力 τ_t の和となっている。書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_l}{\rho} + \frac{\tau_t}{\rho} \right) \quad (5.54)$$

となる。ここで、

$$\tau_l = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \tau_t = -\rho \overline{u'v'} \quad (5.55)$$

境界層近似を施した、式(5.50)および式(5.51)を解くには変動項(2つの変動量が掛かった項)が平均量で表せないと解けない。この問題を closure problem と呼ぶ(数学的に言えば、未知数の数が方程式の数より多い問題を閉じていない問題と呼ぶ)。つまり、この問題はこのままでは閉じない、あるいは解けないのである。これはレイノルズ平均を施した結果生じた大きな問題点である。

「参考」

トルミン・シュリヒティング不安定 (Tollmien-Schlichting instability) とは、境界層内で一定周波数の2次元進行波(TS波)が時間とともに増幅する現象で、 $Re = U_e \delta^* / \nu < 420$ (U_e は境界層外側の速度、 δ^* は排除厚さ)では、擾乱は増幅しない。つまり、速度 U_e が大きいと、あるいは δ^* が大きいと(境界層では下流に行くほど δ^* は大きくなる)、TS波は成長する。境界層内のTS波(線形波)が増幅して、その後、非線形になり、最終的に下流で乱流に遷移する。

「参考終わり」

5.4 乱流モデルによる理論的仮定

乱流の方程式を解くためには、その中に含まれる変動量の2次相関項をいかにモデル化するかがポイントとなる。これに関して、ブシネ(ブシネスクとも呼ばれる; J. Boussinesq, 1897)が一つの提案を行った。これを渦粘性モデルと呼ぶ。つまり、乱流応力を平均流の量と関連付けて

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (5.56)$$

と仮定した。ここで、係数 μ_t は乱流粘性係数 (apparent viscosity, virtual viscosity, eddy viscosity) と呼ばれる。しかし、たとえこのように仮定したところで、 μ_t は未知量であるので、これを何らかの形で決定する必要がある。

ちなみに、渦粘性モデルの、より厳密な式は、

$$\tau_{ij} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad (5.57)$$

となる。ここで、 S_{ij} は速度の歪み率、 k は乱流運動エネルギー (turbulent kinetic energy) である。

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (5.58)$$

また、式 (5.57) の右辺第 2 項は、左辺の応力テンソルの対角項の和 (つまり、トレース) を考えたとき、この値は 0 になるべきである。従って、右辺も 0 にするために追加されている。この項は、一見して、運動方程式に入ってこないが、これは、面に垂直な応力である圧力項に加えられていると解釈する。

5.4.1 渦粘性モデルによる 2 次元乱流境界層方程式

ブシネ (あるいはブシネスク) の渦粘性モデルを適用すると、2 次元乱流の境界層方程式 (5.50), (5.51) は以下のように平均量だけの方程式として書かれる。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.60)$$

(参考) エネルギー式に対する Reynolds 分解

上式では連続の式と運動方程式に関する Reynolds 分解を示したが、エネルギー式に対する Reynolds 分解も同様に行うことができる。

エネルギー式は式 (4.47) より 2 次元の場合以下のように書くことができる。

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5.61)$$

左辺は、連続の式を使うと、下記のように保存形に変形できる。

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (5.62)$$

ここで、Reynolds 分解を下記のように行う。

$$uT = (\bar{u} + u')(\bar{T} + T') = \bar{u}\bar{T} + \bar{u}T' + u'\bar{T} + u'T' \quad (5.63)$$

この平均をとると、

$$\overline{uT} = \bar{u}\bar{T} + \overline{u'T'} \quad (5.64)$$

となる。ここで、以下のモデル化を行う。

$$\rho C_p \overline{u'T'} = k_t \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.65)$$

ここで、 k_t は乱流熱伝導係数である。これを、乱流プラントル数 Pr_t と関係づける。

$$Pr_t = \frac{\mu_t C_p}{k_t} \quad (5.66)$$

5.4.2 混合距離理論

ここでは、乱流粘性係数 ν_t を決定するための、プラントルの混合距離理論 (Prandtl's mixing-length theory) について説明する。L.Prandtl は 1925 年に新しい理論である混合距離理論を開発した。このとき、Prandtl は、この理論を誘導するのにあたり、気体運動論 (kinetic theory of gases) を参考にした。

ここでは、以下のような簡単な流れ場について考える。

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \bar{v} = 0, \bar{w} = 0 \quad (5.67)$$

$y = y_1 - l$ のところにある流体の塊あるいは乱流渦 (eddy) が、 y_1 のところに移動することにより、 y_1 での速度減少は、

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) \approx \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_1} l \quad (5.68)$$

となる。同様に、 $y_1 + l$ のところにある流体の塊が、 y_1 のところへ移動することにより、 y_1 での速度増加は、

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \approx \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_1} l \quad (5.69)$$

となる。

以上の、式 (5.68) と式 (5.69) より、 y_1 での速度変動は、平均的に

$$\overline{|u'|} = \frac{1}{2}(|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_1} l \quad (5.70)$$

と見なせる。

連続の式の関係から、あるいは、検査体積 (control volume) の考え方から、 y 方向の速度変動も u' と同じ程度の大きさ (オーダー) と考えられる。

$$\overline{|v'|} = \text{const} \overline{|u'|} = \text{const} \cdot \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_1} l \quad (5.71)$$

以前議論した、式 (5.20) および (5.22) より $u'v'$ の相関の符号は

$$\overline{u'v'} < 0 \quad (5.72)$$

であるので、符号を付けて

$$\overline{u'v'} = -c \overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|} \quad (5.73)$$

と書ける。ここで、定数 c は、 $0 < c < 1$ である。この理由は、相関係数 (correlation coefficient)

$$\frac{\overline{u'v'}}{\overline{|u'|} \overline{|v'|}} \quad (5.74)$$

の絶対値は必ず 1 より小さいからである。

式 (5.70) と (5.71) を式 (5.73) に代入すると、

$$\overline{u'v'} = -c \cdot \text{const} \cdot l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (5.75)$$

これらの定数係数を l の中に入れた形で、改めて l を定義し直せば、

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (5.76)$$

と書ける。

これを使うと乱流粘性応力 τ_t は

$$\begin{aligned}\tau_t = -\rho\overline{u'v'} &= \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_1^2 \\ &= \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}\end{aligned}\quad (5.77)$$

となる。この式の中の絶対値はせん断応力 (shear stress) の符号を考慮して付けている。つまり、 $d\bar{u}/dy < 0$ の場合にも適用できる。以上がプラントルの混合距離理論である。

この結果、ブシネ (Boussinesq) の式 (5.56) と式 (5.77) を比較すると、乱流粘性係数が以下のように表されることが分かる。

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (5.78)$$

μ_t がこのような形で表されたとしても、式 (5.78) はまだ混合距離 l を未知量として含んでおり、これをどのように決定するかの問題が残る。

(参考) 分子粘性は、気体分子運動論 (gas kinetic theory) では

$$\mu = \beta_\mu \rho \bar{c} \lambda_m \quad (5.79)$$

となる。ここで、 λ_m は平均自由行程 (mean free path) で、 \bar{c} は分子の平均速度、 $\beta_\mu = 1/3$ である。 \bar{c} は、 $\sqrt{\bar{c}^2}$ のように、 $T^{1/2}$ に比例するので、 μ は $T^{1/2}$ に比例する。また、 λ_m は $1/\rho$ に比例するので、その結果、 μ は ρ に依存しない。ちなみに、平均自由行程 λ_m は、以下の式で表される。

$$\lambda_m = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2(\rho/m)} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad (5.80)$$

ここで、 d は、分子の衝突に関する有効直径 (effective diameter) で、空気の場合、基準状態 (0° , 1atm) で、 $d = 3.7 \times 10^{-10} \text{ m}$ である。また、 m は分子 1 個の質量、 n は数密度である。基準状態では、 $n = 2.68699 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ である。この数値を式 (5.80) に代入すると、基準状態での空気の平均自由行程は、 $\lambda_m = 6.12 \times 10^{-8} \text{ m}$ となる。

平均自由行程 λ_m とコルモゴロフ (Kolmogorov) の長さスケール (length scale) η との関係は

$$\frac{\lambda_m}{\eta} \sim \frac{M}{Re_L^{1/4}} \quad (5.81)$$

である。ここで、 $Re_L = uL/\nu$ は乱流レイノルズ数、 $M = u/a$ は乱流マッハ数である。 L は、エネルギーを持った乱流渦 (eddy) に関する長さスケールで、統計乱流理論では、積分スケール (integral scale) と呼ばれる。

乱流レイノルズ数が大きくなると、平均自由行程に比べて乱流の Kolmogorov の長さスケール η は大きくなる。別の言い方をすれば、その差は大きくなる。一方、マッハ数が小さくなっても同じ状態が得られる。圧縮性の効果として、マッハ数 M が増大すると、その比は増大する。

Kolmogorov のマイクロスケール η の定義は、

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (5.82)$$

である。ここで、 ν は動粘性係数で、 ϵ は散逸率である。

$$\epsilon \equiv 2\nu S_{ij} S_{ij} \quad (5.83)$$

S_{ij} は歪み率で、

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.84)$$

である。

ちなみに、乱流の世界では、テーラーのマイクロスケール λ (Taylor microscale) がよく使われる。等方性乱流では、

$$\epsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} \equiv 15\nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \quad (5.85)$$

と定義される。ここで、Taylor(1935) によって、純粋に次元解析から得られた関係式

$$\epsilon \sim \frac{k^{3/2}}{l}, \quad k \sim \frac{\overline{u'^2}}{l} \quad (5.86)$$

を使って、

$$\frac{\lambda}{l} \sim Re_l^{-1/2} \quad \text{あるいは} \quad \lambda \sim (l\eta)^{1/3} \quad (5.87)$$

となる。ここで、 Re_l は、通常の乱流レイノルズ数で、

$$Re_l = \frac{k^{1/2} l}{\nu} \quad (5.88)$$

である。このレイノルズ数を使うと、コルモゴロフの長さスケール η とエネルギーを持った乱流渦 (eddy) の長さスケール l との比は、

$$\frac{\eta}{l} \sim Re_l^{-3/4} \quad (5.89)$$

となる。

一般に高レイノルズ数乱流 (Re_l の大きい乱流) では、これらのスケールには開きがある。つまり、

$$\eta \ll \lambda \ll l \quad (5.90)$$

一方、数値計算結果では、しばしばマイクロスケールレイノルズ数 Re_λ が使用される。

$$Re_\lambda = \frac{u'\lambda}{\nu} = \frac{k^{1/2}\lambda}{\nu} \quad (5.91)$$

乱流渦 (eddy) のスケールサイズのための標準的な乱流長さスケールは、

- l : エネルギーを多く持った乱流渦に対する積分長さスケール (integral length scale)
- λ : 慣性小領域 (inertial subrange eddies) 渦のためのテーラーのマイクロスケール; 粘性散逸が乱流渦に影響を及ぼし始めるサイズでもある。
- η : 散逸領域にある渦のためのコルモゴロフのマイクロスケール (Kolmogorov microscale)

である。(参考了)

式 (5.78) の渦粘性係数の欠点は、平均速度分布が $d\bar{u}/dy = 0$ となるところで $\mu_t = 0$ になってしまうことである。実際の流れでは $d\bar{u}/dy = 0$ のところでも乱流による乱れは存在し、渦粘性係数が 0 になることはない。このような流れは、後流 (wake) のような自由乱流 (free turbulent) の場合に起こる (図 (5.7) 参照)。

これに対する対策として、このような流れでは、速度の微分を速度の差分に置き換えて、 μ_t を以下のように与える。

$$\mu_t = \kappa_1 \rho b (\overline{u_{max}} - \overline{u_{min}}) \quad (5.92)$$

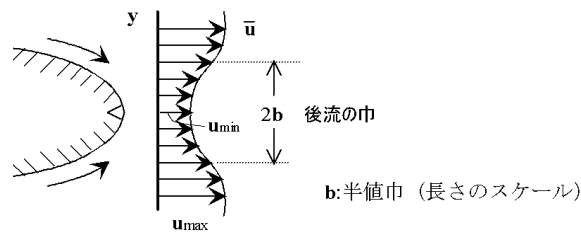


図 5.7: 後流の場合の乱流粘性係数

ここで、 b は半値巾 (half-value width) である。半値幅 b とは、半値である $(u_{max} - u_{min})/2$ となる位置と u_{min} の位置との長さで定義される。これを使うと、乱流粘性応力は

$$\tau_t = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho \kappa_1 b (\overline{u_{max}} - \overline{u_{min}}) \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{5.93}$$

となる。

5.5 壁面近くでの乱流の構造

ここでは壁面近くでの乱流流れ場に対する物理モデルとして、多層モデル (multi-layer model) について勉強する。まず、壁近くの内層について以下に述べる。

壁近くでは、経験的に導かれた壁法則 (the law of the wall) が成立する。

$$u^+ = f(y^+), \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{5.94}$$

ここで、 u_τ は壁速度である。この法則では、いろいろな要素、例えば、流れの過去の履歴、壁の曲率、外側のポテンシャル流れの性質などが、すべて u_τ という一つの基準速度の中に含まれている。

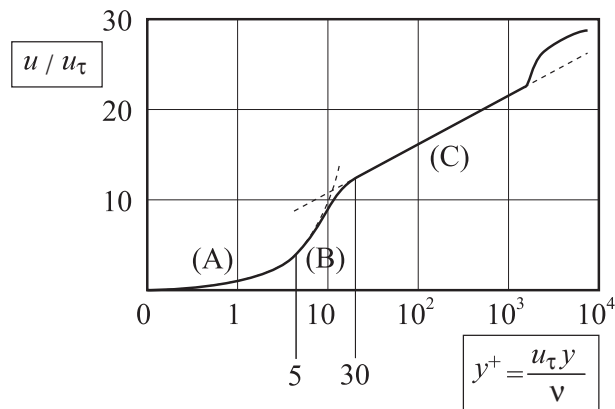


図 5.8: 境界層内層での速度分布

5.5.1 粘性底層 (viscous sublayer)

粘性底層は壁に一番近い流れ場の領域である。この領域では壁が邪魔して乱流の塊が変動しにくく、その結果、乱流変動が抑えられる。従って、ここでは、乱流応力 $-\rho \overline{u'v'}$ が無視できる。これは

壁から

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \leq 5 \quad (5.95)$$

の領域である。ここで、 u_τ は摩擦速度で

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5.96)$$

と定義される。

また、ここでの速度分布は

$$u^+ \equiv \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} = y^+ \quad (5.97)$$

となる。ここで、 u_τ はエネルギーの大きい乱流渦の速度スケールを、また、 y はその長さのスケールを表す。

ちなみに、壁からの距離が離れて、

$$\frac{u_\tau y}{\nu} \gg 1 \quad (5.98)$$

となれば、分子粘性 μ の影響は少ないと考えてよい。つまり、そこでは乱流粘性が支配的となる。

(参考) $0 < y^+ < 10$ の範囲では、壁と平行で主流方向に伸びたストリーク (streak) が存在する。このストリークは局所平均速度の半分程度の速度で移動する。一方、スパン方向のストリーク間の領域では、高速で動く。このストリークは、バースト (burst) と呼ばれる現象が発生し、壁から持ち上がった後、より小さな渦に崩壊する。(了)

5.5.2 干渉領域 (buffer layer)

この領域では分子粘性応力と乱流粘性応力の両方が存在する。つまり、分子粘性力とレイノルズ応力が同じオーダーになる。乱流エネルギーが最も活発な領域で、乱流エネルギーの生成が $y^+ = 12$ で最大となる。

干渉領域の壁からの距離としては

$$5 < y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} < 30 \sim 40 \quad (5.99)$$

である。

せん断力に関しては

$$\tau_{total} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{uv} \cong \tau_w \quad (5.100)$$

となる。

最もエネルギーの大きい乱流渦の長さスケール l は

$$l = \kappa y \left(1 - \exp \left[-\frac{u_\tau y}{A\nu} \right] \right) \quad (5.101)$$

と仮定される。ここで、丸括弧の部分は、van Driest により提案された減衰関数 (damping function) であり、この中に含まれている定数 A は

$$A = 26 \quad (5.102)$$

が使われる。

上述したように、速度は壁法則より y^+ の関数として表される。

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) = f(y^+) \quad (5.103)$$

干渉領域における f に関して一般的な式は存在しないが、例えば以下の近似式が提案されている。

$$u^+ = \bar{u}/u_\tau = C_1 + C_2 \ln y^+ + C_3 (\ln y^+)^2 + C_4 (\ln y^+)^3 \quad (5.104)$$

ここで、

$$C_1 = 4.19, C_2 = -5.75, C_3 = 5.11, C_4 = -0.767 \quad (5.105)$$

である。

ちなみに、粘性底層とバッファ領域を含んだ形では、以下の経験式 (fitting formula) がある。

$$y^+ = u^+ + \exp(-\kappa C) \left[\exp(\kappa u^+) - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \quad (5.106)$$

ここで、 $\kappa = 0.41$ 、 $C = 5.0$ である。 κ は von Karman 定数と呼ばれ、Theodore von Karman にちなんで名付けられた。

5.5.3 対数法則分布領域 (logarithmic law region)

この領域では乱流エネルギーの生成と散逸が平衡している。つまり、乱流エネルギーの方程式の右辺が 0 となる。この流れ場は

$$(30 \sim 40) < y^+ < O(10^3) \quad \text{or} \quad y < (0.1 \sim 0.2)\delta \quad (5.107)$$

で起こる。ここで、 δ は境界層厚さである。

この領域では分子粘性がほとんど効かない。つまり、せん断応力としてはレイノルズ応力だけである。

$$\tau_{total} \approx -\rho \overline{u'v'} \quad (5.108)$$

その結果、この式から

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx \frac{(-\overline{u'v'})^{1/2}}{\kappa y} \quad (5.109)$$

が得られる。この式を積分すると

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(u_\tau y / \nu) + C \quad (5.110)$$

となる。 κ はカルマン定数で、 C は実験データより得られる無次元の普遍定数で以下の値を取る。

$$\kappa \approx 0.41, \quad C = 5.2 \quad \text{or} \quad 5.0 \quad (5.111)$$

ちなみに、 (κ, C) に対して、Nikuradse(1930) は、(0.40, 5.5) の値を、また、Coles(1955) は、(0.41, 5.0) の値を提案している。

以上の、3つの領域、つまり、壁から外側に向かって順番に、1) 粘性底層、2) 干渉領域、3) 対数速度領域を合わせて乱流境界層の内層 (inner region) と呼ぶ。

5.6 乱流モデル

ここでは、Cebeci-Smith モデル、Baldwin-Lomax モデル、 $k - \epsilon$ モデルについて述べる。

5.6.1 Cebeci-Smith モデル

前述した内層に基づいた乱流モデルとして、Cebeci-Smith のモデル (CS モデル; 1974) がある。これは、乱流モデルとしては一番簡単な、代数モデル (あるいは0方程式モデル) に属する。

1) 内層では:

長さスケール l は

$$l = \kappa y D \quad (5.112)$$

ここで、 D は van Driest の減衰関数で、以下のものである。

$$D = \left[1 - \exp\left(-\frac{yu_\tau}{\nu A}\right) \right] \quad (5.113)$$

また、速度スケールは

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (5.114)$$

である。これらを使って、内層での乱流粘性係数 $\nu_{t,in}$ は

$$\nu_{t,in} = \frac{\mu_t}{\rho} = \left\{ \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{yu_\tau}{\nu A}\right) \right] \right\}^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (5.115)$$

と与える。これは、混合距離理論から得られる。ここで、

$$\kappa = 0.4, \quad A = 26 \quad (5.116)$$

である。

2) 外層では:

外層での動粘性係数 $\nu_{t,out}$ は以下のように定義する。

$$\nu_{t,out} = \kappa_2 U_e \delta_1 \gamma \quad (5.117)$$

ここで、 κ_2 は係数で、 $\kappa_2 = 0.017$ 、また、 U_e は境界層外側の速度である。

一方、 $0.4\delta < y < 1.2\delta$ では、層流と乱流とが混ざった状態となっている。これを表すのが γ で、間欠係数と呼ばれる。Klebanoff は γ を以下の式で与えた。

$$\gamma = [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1} \quad (5.118)$$

ここで、 δ は境界層厚さである。 $\gamma = 1$ は乱流を、また、 $\gamma = 0$ は層流を示す。ちなみに、通常は、 $y/\delta = 1.4$ 程度までは乱れは存在する。

以上より、内層での $\nu_{t,in}$ と外層での $\nu_{t,out}$ が一致する壁からの距離を y_k とすれば、

$$\nu_{t,in} = \nu_{t,out} \quad \text{at} \quad y = y_k \quad (5.119)$$

これを満たすように y_k が計算される。このようにして、内層および外層での乱流粘性係数が決定される。

$$\nu_t = \nu_{t,in} \quad 0 < y < y_k \quad (5.120)$$

$$\nu_t = \nu_{t,out} \quad y_k < y \quad (5.121)$$

以上述べた代数モデルは簡単で物理的性質を考慮しているので分かりやすい。しかし、欠点として、非平衡乱流場を表すのには向いていない。非平衡乱流場とは、乱流エネルギーの対流や拡散に対する、いわゆる、history effects が強く、乱流の局所的な (場所場所での) 生成と散逸とのバランスが取れていないものを言う。特に、流れ方向に急激に変化する境界層では、この history effects の効果を被る。

5.6.2 Baldwin-Lomax モデル

Cebeci-Smith モデルを踏襲し、Cebeci-Smith モデルでの境界層厚さの計算を簡略化したのが、Baldwin-Lomax モデル (1978) である (以降、BL モデルと呼ぶ)。航空宇宙工学分野では非常によく使われており、極超音速流でも壁からの熱伝達が実験と良く一致するという報告もある。この方法の長所は、境界層厚さ (δ) を計算する必要がないことで、境界層厚さに準じるスケールを境界層内の渦度分布から計算する。剥離流がうまく解けるかどうかの議論があり、その修正版もある。CS モデルと BL モデルはかなり類似しているが、違いは外層での長さスケールと速度スケールの取り方で、BL モデルは渦度に、CS モデルは速度に基づいている。

渦度のモメントである渦関数 F を、以下のように定義する。

$$F(y) = y|\omega|D \quad (5.122)$$

ここで、 ω は渦度で、 $\omega = \partial\bar{v}/\partial x - \partial\bar{u}/\partial y$ で定義される。また、 D は前述した van Driest の減衰関数 (式 (5.113)) である。

BL モデルは剥離流の計算が難しい。特に、長さスケール y_{max} とそれを使った μ_{to} が剥離領域で決定しにくい。ここで、 y_{max} は、式 (5.122) の F が最大となる y である。

渦粘性係数は長さスケールと速度スケールの積として次のように与えられる。

$$\mu_{ti} = \rho l^2 |\omega|, \quad l = \kappa y D \quad \text{for } y \leq y_c \quad (5.123)$$

$$\mu_{to} = KC_{cp}\rho y_{max} F_{wake} \gamma \quad \text{for } y > y_c \quad (5.124)$$

y は壁からの距離 (次元量) で、 y_c は $\mu_{to} = \mu_{ti}$ となる、壁に最も近い壁からの距離である。内層では Prandtl-van Driest の混合の式が使われる。 ρ は密度で、 C_{cp} は Baldwin と Lomax によって導入された付加定数で、 $C_{cp} = 1.6$ である。 κ は Karman 定数で 0.42、 K は Clauser 定数で 0.0168 である。 γ は Klebanoff の間欠関数で、以下のようである。

$$\gamma(\tilde{y}) = 1/[1 + 5.5(\tilde{y})^6] \quad (5.125)$$

式 (5.124) では、 $\tilde{y} = C_{kleb} y/y_{max}$ としている。また、 C_{kleb} は 0.3 である。

減衰関数は非圧縮性流では CS モデルと BL モデルは同じになる。BL モデルの外層に現れる定数はマッハ数に依存するという報告もある。

μ_{to} に現れる F_{wake} は、

$$F_{wake} = \min(F_{max}, C_{wk} u_{diff}^2 / F_{max}) \quad (5.126)$$

である。ここで、 F_{max} は式 (5.122) の F の最大値で境界層の中に限られる。 C_{wk} は 0.25 で、 u_{diff} は最大流速と最小流速の差である ($u_{diff} = u_{max} - u_{min}$)。長さスケールは、内層では $l (= \kappa y D)$ 、外層では y_{max} である。

亜音速流と遷音速流では CS モデルも BL モデルも同じような結果を示すが、超音速や極超音速流になると違いが生じてくる。この違いは壁近傍での減衰関数の形、外層での渦粘性の表式、また、外層での間欠係数の影響による。

5.6.3 $k - \epsilon$ モデル

2 方程式モデルの代表が $k - \epsilon$ モデルである。ここで、 k は単位質量当たりの乱流運動エネルギー (turbulent kinetic energy) である。

$$k = \frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{2} \quad (5.127)$$

ここで、 u', v', w' は x, y, z 方向の変動速度成分である。一方、 ϵ は乱流運動エネルギーの散逸率 (dissipation rate) である。ちなみに、 k/ϵ は、乱流渦 (eddy) の生存時間 (life time) である。

k と ϵ が求めれば、乱流粘性は以下の式で計算する。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.128)$$

ここで、 $C_\mu = 0.09$ である。

乱流の運動エネルギー k に対する方程式は

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (5.129)$$

一方、乱流エネルギーの散逸率に対する方程式は

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{C_{\epsilon 1} \mu_t}{\rho} \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.130)$$

ここで、各係数は

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\epsilon 1} = 1.45, \quad C_{\epsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (5.131)$$

である。

(参考) 乱流運動エネルギー k に対する支配方程式を誘導するためには、機械的エネルギーの式から出発する。それは運動方程式から導かれる。運動方程式は、

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.132)$$

と書ける。この式の両辺に u_i を掛けて変形すると、

$$\begin{aligned} \rho u_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5.133)$$

となる。

これと同様にして、平均流に対する運動方程式は、

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.134)$$

となる。この式に \bar{u}_i を掛けて変形すると、

$$\begin{aligned} \rho \bar{u}_j \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial \bar{u}_i \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5.135)$$

となる。ここで、平均流の応力は、

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu \bar{S}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j} \quad (5.136)$$

となる。

式 (5.133) において、各従属変数を平均量と変動量の和の形にして、その後、式全体に平均をとる。この式から、式 (5.135) を差し引くと、乱流運動エネルギー $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ に対する方程式を求めることができる。いくつか同じ項が存在し、簡単化される。

このようにして誘導された流れの運動エネルギーを以下に示す。

- 平均流に対する運動エネルギー $K (= \bar{u}_i \bar{u}_i / 2)$:

$$\rho \frac{\bar{D}}{\bar{D}t} K = -\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_j \bar{p} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{S}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \overline{\rho u'_i u'_j}) - 2\mu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} + \overline{\rho u'_i u'_i \bar{S}_{ij}} \quad (5.137)$$

- 変動量に対する運動エネルギー (乱流運動エネルギー) $k (= \overline{u'_i u'_i} / 2)$:

$$\rho \frac{\bar{D}}{\bar{D}t} k = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j p'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i 2\mu S'_{ij}} - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j (u'_i u'_i) / 2} - 2\mu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} - \overline{\rho u'_i u'_i \bar{S}_{ij}} \quad (5.138)$$

これら2つの式の最後の項は符号が逆である。乱流運動エネルギー式では、乱流運動エネルギーの生成項であり、その分が平均流の式では、失われることを意味している。また、実質微分は、平均流を用いたものであることに注意すること。

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (5.139)$$

5.7 乱流流れ場の相似性

代表的流れ場である、後流 (wake), ジェット (jet), 混合層 (mixing layer) の場合には、物体からある程度離れた下流では、流れが相似性 (similarity) を示す。つまり、 x 方向に変化していく流れの分布が各 x の断面で似たような形状をもつ。相似性は、流れ場の変化していく方向に境界が無い場合に存在する。

これらの流れの特性量である、代表速度 U_s 、半値幅 b (half-value width) は、下流方向の長さ x に対して、 x のべき乗 (power) で変化する。

$$U_s \sim x^m, \quad b \sim x^n, \quad R_b \sim x^l \quad (5.140)$$

ここで、 $l = m + n$ である。また、レイノルズ数 R_b と乱流のレイノルズ数 R_t は以下のように定義される。

$$R_b = \frac{U_s \cdot b}{\nu}, \quad R_t = \frac{U_s \cdot b}{\nu_T} \quad (5.141)$$

ここで、 ν_T は乱流粘性係数である。

各流れにおける指数 (m, n, l) を表 5.1 にまとめる。

流れの種類	m	n	l	R_t
2次元後流	-1/2	1/2	0	12.5
軸対称後流	-2/3	1/3	-1/3	14.1
混合層	0	1	1	17.3
2次元ジェット	-1/2	1	1/2	25.7
軸対称ジェット	-1	1	0	32

表 5.1: 後流、混合層、ジェットにおける特性量の値

(参考) 格子を通過した後、その下流側に発生する乱流 (格子乱流) では、その変動の強さ q と、乱流渦 (eddy) の長さスケール L は、格子から下流方向の長さ x に対して、以下のように変化する。

$$q \sim \frac{1}{x^n}, \quad L \sim x^{1-n/2} \quad (5.142)$$

ただし、 $n \simeq 1$ である。(参考了)

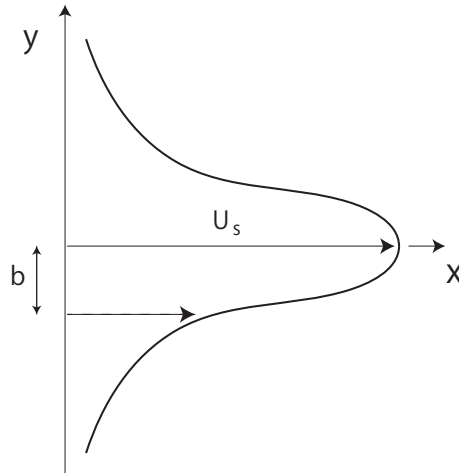


図 5.9: ジェット

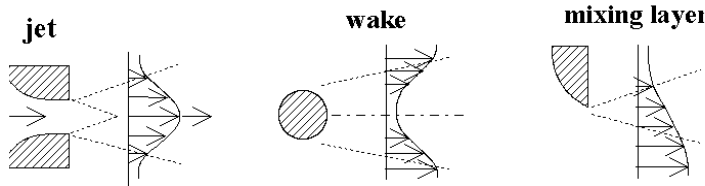


図 5.10: ジェット、後流、混合層の流れ

5.8 不安定

層流から乱流へ変化する過程を遷移 (transition) と呼ぶ。これは解析が大変難しい領域である。遷移するには、最初流れの中に小さな変動が存在し、それが成長していく。最初は線形で成長していく。

この流れを取り扱うのが、線形安定理論である。

平行流に対する安定解析の方程式は、オル・ゾンマーフェルド方程式 (Orr-Sommerfeld equation) が有名である。

$$(U - C)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U''\phi = -\frac{i}{\alpha Re} (\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) \quad (5.143)$$

ここで、プライム (') は、 y での微分を表す。また、 $C = \beta/\alpha$ である。

平行流 (parallel flow) というのは、基本流 (あるいは主流) が以下の式を満たすものである。

$$U = U(y), \quad V = 0, \quad W = 0 \quad (5.144)$$

主流を除いた一次の微小量を以下のように表わす。

$$u = \hat{u} \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)] \quad (5.145)$$

ここで、 α 、 β は、波数ベクトル \vec{k} の、それぞれ x 方向、 z 方向成分である。つまり本来、

$$u = \hat{u} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \quad (5.146)$$

である。この式は、進行する (伝播する) 波を表わす基本式である。

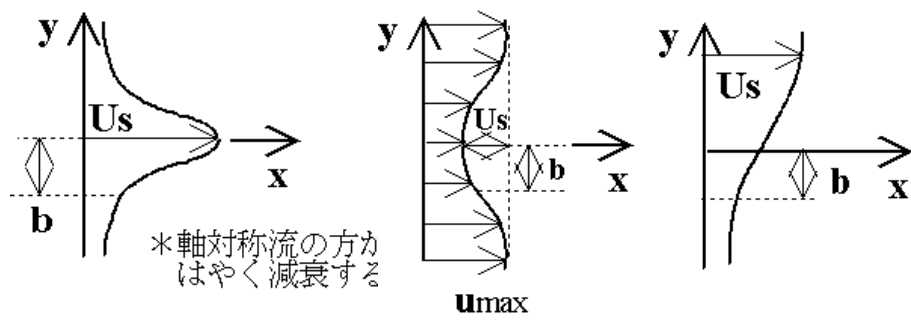


図 5.11: 各流れの特性速度と特性長さ